

2. előadás

Másodfajú improprius integrál

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. február 11.

Bevezetés

A határozott integrálnál feltettük, hogy a függvény korlátos.

De erre nem feltétlenül van szükség, ha határértéket számolunk.

Például: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ függvény nem korlátos a $(0, 1]$ intervallumon, de bármilyen $0 < a < 1$ esetén az $[a, 1]$ intervallumon már korlátos, tehát tudjuk integrálni:

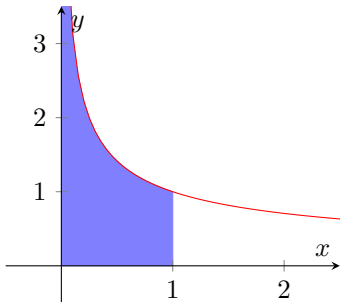
$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_a^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_a^1 = [2\sqrt{x}]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}$$

Mi a határérték, ha a nullához tart (jobbról)?

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{a}) = 2$$

Ez a határérték létezik és véges, így legyen

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$



Másodfajú improprius integrál

Korlátos intervallumon integrálunk egy nem korlátos függvényt, azaz:

Ha az f függvény az $[a_0, b_0]$ intervallumon nem korlátos, de

minden $[a, b_0]$ ($a_0 < a < b_0$)
intervallumban korlátos és
integrálható, és a

$$\lim_{a \rightarrow a_0+} \int_a^{b_0} f(x) \, dx$$

minden $[a_0, b]$ ($a_0 < b < b_0$)
intervallumban korlátos és
integrálható, és a

$$\lim_{b \rightarrow b_0-} \int_{a_0}^b f(x) \, dx$$

határérték létezik és véges, akkor ez a szám az

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x) \, dx$$

improprius integrál. Ekkor konvergens az improprius integrál.

Ha a határérték nem létezik vagy végtelen, akkor az improprius integrál divergens.

Példa:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ a $[0, 1]$ intervallumon:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2$$

Egy másik példa

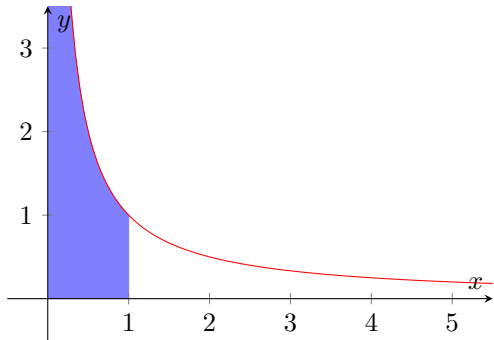
Integráljuk az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt a $[0, 1]$ intervallumon:

Egy másik példa

Integráljuk az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvényt a $[0, 1]$ intervallumon:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} [\ln x]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln a) = +\infty$$

Így ez az improprius integrál divergens.



Az $\frac{1}{x^p}$ általában

Konvergens vagy divergens az $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ improprius integrál ($p \in \mathbb{R}$)?

Az $\frac{1}{x^p}$ általában

Konvergens vagy divergens az $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ improprius integrál ($p \in \mathbb{R}$)?

A $p = 1$ esetén divergens (előző dia), míg $p \neq 1$ esetén:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^{-p} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_a^1 = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_a^1 = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p} \right)\end{aligned}$$

Felhasználjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^q = \begin{cases} 0, & \text{ha } q > 0 \\ 1, & \text{ha } q = 0 \\ +\infty, & \text{ha } q < 0 \end{cases}$$

Így $1 - p > 0$, azaz $1 > p$ esetén az improprius integrál konvergens, és az értéke:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p} \right) = \frac{1}{1-p}$$

($p = 1$ esetén is divergens)

Ha $1 - p < 0$, azaz $1 < p$, akkor divergens az improprius integrál.

Egy feladat

Konvergens vagy divergens az $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$ integrál?

Egy feladat

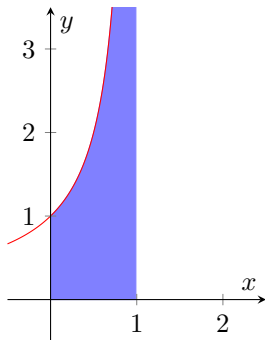
Konvergens vagy divergens az $\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx$ integrál?

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} [-\ln(1-x)]_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} -\ln(1-b) - 0 = +\infty\end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy

$$(\ln(1-x))' = -\frac{1}{1-x}$$

Tehát ez az improprius integrál divergens.



$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$$

Az intervallum mindkét végén végtelenbe tart a függvény, így kettévágjuk:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Az első integrál:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{a \rightarrow -1^+} \int_a^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{a \rightarrow -1^+} [\arcsin(x)]_a^0 = \\ &= \lim_{a \rightarrow -1^+} (0 - \arcsin(a)) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Hasonlóan számolhatjuk a második integrált:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} [\arcsin(x)]_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow 1^-} \arcsin(b) - 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Az eredeti integrál:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Itt is van veszély!

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx = ?$$

Itt is van veszély!

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx = ?$$

Az intervallum mindkét végén végtelenbe tart a függvény, így ketté kell vágni:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \operatorname{tg} x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx$$

Az első:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \operatorname{tg} x \, dx &= \lim_{a \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \int_a^0 \operatorname{tg} x \, dx = \lim_{a \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} [-\ln(\cos x)]_a^0 = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} (-\ln 1 - (-\ln(\cos a))) = \lim_{a \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \ln(\cos a) = -\infty \end{aligned}$$

Így az improprius integrál divergens, a másik tagot ki sem kell számolni.

Nem lehet ezt a következő módon számolni:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx \neq \lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_{-a}^a \operatorname{tg} x \, dx = \lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [-\ln(\cos x)]_{-a}^a = \lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 0 = 0$$

