6. előadás

Mátrixok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. február 25.

Bevezetés

Táblázatszerűen téglalapba írunk számokat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

típusa: 3×5 (3 sora és 5 oszlopa van)

Általános jelölés:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme a_{ij}.
Típusa: $m \times k$ (m sora és k oszlopa van).

Ha $k = m$, akkor négyzetes mátrix.

Transzponált

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix főátlója az $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{kk}/a_{mm}$.

Az $\mathbf{A}$ mátrix mellékátlója $a_{1k}, a_{2,k-1}, \dots$

Az $m \times k$-as $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltja az a $\mathbf{B}$ $k \times m$-es mátrix, melyre

$$b_{ij} = a_{ji} \quad (1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m)$$

Jelölés: $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top$

Tulajdonság: $\left(\mathbf{A}^\top\right)^\top = \mathbf{A}$.

Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Mátrixok és vektorok

Az n dimenziós vektorokat is tekinthetjük mátrixoknak:

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

Sorvektorként $1 \times n$-es mátrix: $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$

Oszlopvektorként $n \times 1$-es mátrix: $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

Ezek egymás transzponáltjai:

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$$

Műveletek mátrixokkal

Összeadás:

Az $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ akkor van értelmezve, ha a két mátrix ugyanolyan típusú.
A megfelelő elemeket adjuk össze, azaz $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ esetén $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Példa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Különbség:

Az összeadáshoz hasonlóan, csak $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ esetén $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Valós számmal való szorzás:

$\lambda \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{A}$ egy $m \times k$-as mátrix.

A valós számmal a mátrix minden elemét megszorozzuk, azaz $\mathbf{B} = \lambda \mathbf{A}$ esetén $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Példa:

$$3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

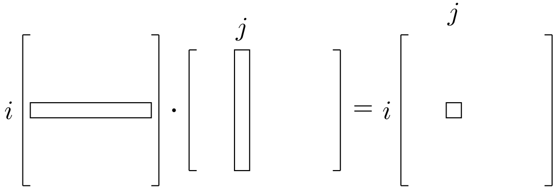
Ezek a műveletek vektorokra is ugyanígy működnek.

Mátrixok szorzása

Az $\mathbf{A}$ $m_1 \times k_1$-es és $\mathbf{B}$ $m_2 \times k_2$-es mátrixot pontosan akkor szorozhatjuk össze, ha $k_1 = m_2$.

Ha $\mathbf{A}$ $m \times k$-as, $\mathbf{B}$ $k \times n$-es, akkor a szorzatuk $m \times n$-es $\mathbf{C}$ mátrix, és

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$



Példa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

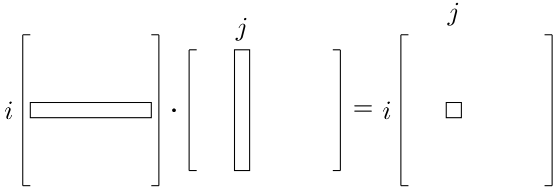
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az $\mathbf{A}$ $m_1 \times k_1$-es és $\mathbf{B}$ $m_2 \times k_2$-es mátrixot pontosan akkor szorozhatjuk össze, ha $k_1 = m_2$.

Ha $\mathbf{A}$ $m \times k$-as, $\mathbf{B}$ $k \times n$-es, akkor a szorzatuk $m \times n$-es $\mathbf{C}$ mátrix, és

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$



Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

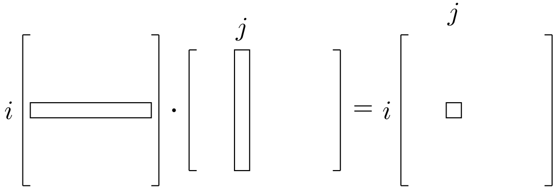
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az $\mathbf{A}$ $m_1 \times k_1$-es és $\mathbf{B}$ $m_2 \times k_2$-es mátrixot pontosan akkor szorozhatjuk össze, ha $k_1 = m_2$.

Ha $\mathbf{A}$ $m \times k$-as, $\mathbf{B}$ $k \times n$-es, akkor a szorzatuk $m \times n$-es $\mathbf{C}$ mátrix, és

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$



Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

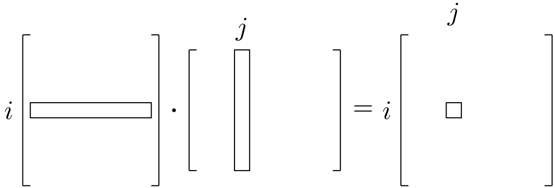
$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 25 & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Mátrixok szorzása

Az $\mathbf{A}$ $m_1 \times k_1$-es és $\mathbf{B}$ $m_2 \times k_2$-es mátrixot pontosan akkor szorozhatjuk össze, ha $k_1 = m_2$.

Ha $\mathbf{A}$ $m \times k$-as, $\mathbf{B}$ $k \times n$-es, akkor a szorzatuk $m \times n$-es $\mathbf{C}$ mátrix, és

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$



Példa:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 25 & 19 & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

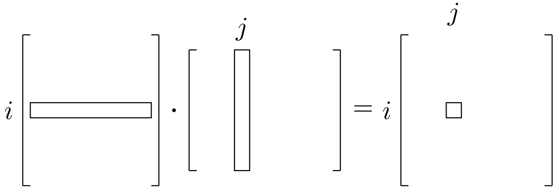
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az $\mathbf{A}$ $m_1 \times k_1$-es és $\mathbf{B}$ $m_2 \times k_2$-es mátrixot pontosan akkor szorozhatjuk össze, ha $k_1 = m_2$.

Ha $\mathbf{A}$ $m \times k$-as, $\mathbf{B}$ $k \times n$-es, akkor a szorzatuk $m \times n$-es $\mathbf{C}$ mátrix, és

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$



Példa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

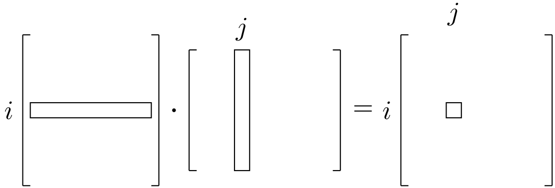
$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 & 25 & 19 & -2 \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

Mátrixok szorzása

Az $\mathbf{A}$ $m_1 \times k_1$-es és $\mathbf{B}$ $m_2 \times k_2$-es mátrixot pontosan akkor szorozhatjuk össze, ha $k_1 = m_2$.

Ha $\mathbf{A}$ $m \times k$-as, $\mathbf{B}$ $k \times n$-es, akkor a szorzatuk $m \times n$-es $\mathbf{C}$ mátrix, és

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$



Példa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

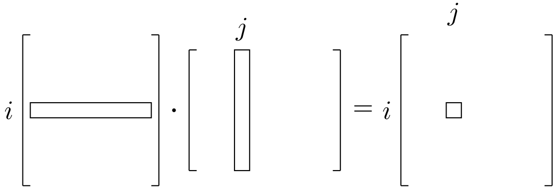
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 25 & 19 & -2 \\ 10 & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzása

Az $\mathbf{A}$ $m_1 \times k_1$-es és $\mathbf{B}$ $m_2 \times k_2$-es mátrixot pontosan akkor szorozhatjuk össze, ha $k_1 = m_2$.

Ha $\mathbf{A}$ $m \times k$-as, $\mathbf{B}$ $k \times n$-es, akkor a szorzatuk $m \times n$-es $\mathbf{C}$ mátrix, és

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell} b_{\ell j} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$$



Példa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 25 & 19 & -2 \\ 10 & 57 & 43 & -4 \\ 16 & 89 & 67 & -6 \end{bmatrix}$$

Feladat

Szorozzuk össze az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixokat.

Feladat

Szorozzuk össze az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixokat.

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

Szorzás tulajdonságai

Nem kommutatív:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Lehet, hogy az egyik elvégezhető, de a másik nem.
Ha el is végezhető, akkor is lehet különböző méretű az eredmény.
De még ha a méret stimmel, akkor sem kommutatív:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{AB} = \qquad\qquad \mathbf{BA} =$$

Szorzás tulajdonságai

Nem kommutatív:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Lehet, hogy az egyik elvégezhető, de a másik nem.
Ha el is végezhető, akkor is lehet különböző méretű az eredmény.
De még ha a méret stimmel, akkor sem kommutatív:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Asszociatív:
Ha $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ értelmes, akkor $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ is, és ezek egyenlőek:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Disztributív:
Ha $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ értelmes, akkor $\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ is, és ezek egyenlőek:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$$

Ha $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}$ értelmes, akkor $\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$ is, és ezek egyenlőek:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$$

Mátrixok szorzása jobbról

$\mathbf{A}$ $m \times k$ típusú mátrix,
$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ a k dimenziós tér egységvektorai (oszlopvektorként):

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Ae}_1$ az $\mathbf{A}$ mátrix első oszlopa,

$\mathbf{Ae}_2$ az $\mathbf{A}$ mátrix második oszlopa,

$\vdots$

$\mathbf{Ae}_k$ az $\mathbf{A}$ mátrix k-adik (utolsó) oszlopa

Ha $\mathbf{v} = (1, 2, 0, \dots, 0)^\top$ és $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^\top$, akkor

$\mathbf{Av}$ az $\mathbf{A}$ első oszlopának és a második oszlopa kétszeresének összege,

$\mathbf{A1}$ az $\mathbf{A}$ oszlopainak összege.

Általában $\mathbf{Av}$ az $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációja ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ oszlopvektor), ahol az együtthatók a $\mathbf{v}$ koordinátái.

Mátrixok szorzása balról

$\mathbf{A}$ $m \times k$ típusú mátrix,
$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ az m dimenziós tér egységvektorai (sorvektorként):

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_m = (0, 0, \ldots, 1)$$

$\mathbf{e}_1\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}$ mátrix első sora,
$\mathbf{e}_2\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}$ mátrix második sora,
$\vdots$
$\mathbf{e}_m\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}$ mátrix m-edik (utolsó) sora

Ha $\mathbf{v} = (1, 2, 0, \ldots, 0)$ és $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$, akkor

$\mathbf{vA}$ az $\mathbf{A}$ első sorának és a második sora kétszeresének összege,
$\mathbf{1A}$ az $\mathbf{A}$ sorainak összege.

Általában $\mathbf{vA}$ az $\mathbf{A}$ sorainak lineáris kombinációja ($\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ sorvektor), ahol az együtthatók a $\mathbf{v}$ koordinátái.

Egységmátrix

Az $n \times n$-es egységmátrix az az $n \times n$-es mátrix, melynek a főátlójában minden elem 1-es és az összes többi eleme 0.
Jelölése: $\mathbf{E}_n$.

Példák:

$$\mathbf{E}_1 = [1] \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Tétel:
Ha az $\mathbf{A}$ mátrix típusa $m \times k$, akkor:

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_k = \mathbf{A} \quad \text{és} \quad \mathbf{E}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Speciális eset: $m = k$ esetén (ekkor $\mathbf{A}$ négyzetes):

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Vektorok szorzása

Ha $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ két n dimenziós oszlopvektor, akkor a $\mathbf{v}^\top\mathbf{w}$ mátrixszorzás eredménye egy 1×1-es mátrix, melynek egyetlen eleme éppen a $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ skaláris szorzat.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}^\top = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{v}\mathbf{w}^\top$ mátrixszorzásnak is van értelme, eredménye egy $n \times n$-es mátrix, ezt diadikus szorzatnak nevezzük.

Ha sorvektorokként képzeljük el a vektorokat, akkor a $\mathbf{v}\mathbf{w}^\top$ szorzatmátrix egyetlen eleme adja meg a skaláris szorzatot.