Készülés az 1. zh-ra

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. március 17.

Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi improprius integrálokat.

$$\text{(a)} \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2x-3)^3}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \quad \int_2^{3} \frac{1}{\sqrt[3]{3-x}}\,\mathrm{d}x$$

2. Bontsuk fel a $(3,2,-5)$ vektort az $(1,0,4)$ vektorral párhuzamos, és arra merőleges komponensekre.
3. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely párhuzamos az $(1,0,2)$ és $(3,1,-2)$ vektorokkal, és átmegy a $P(0,2,2)$ ponton.
   Határozzuk meg a $Q(1,2,1)$ pont távolságát is ettől a síktól.
4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 7z &= 8 \\ 2x + 6y + 4z &= 2 \\ 3x + 7y + 8z &= 7 \end{aligned}$$

5. Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1. feladat (a)

Számítsuk ki a $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{(2x-3)^3}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált.

$$\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{(2x-3)^3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_2^b (2x-3)^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\frac{(2x-3)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_2^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-(2x-3)^{-\frac{1}{2}}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{2x-3}}\right]_2^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{\sqrt{2b-3}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 2-3}} = 1$$

1. feladat (b)

Számítsuk ki a $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{3-x}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált!

Az integrandus $x = 3$-nál tart a végtelenhez, így ott kell határértéket venni:

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{3-x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 3-} \int_2^b (3-x)^{-\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to 3-} \left[-\frac{(3-x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_2^b =$$

$$= \lim_{b\to 3-} \left[-\frac{3}{2}(3-x)^{\frac{2}{3}}\right]_2^b = \lim_{b\to 3-} -\frac{3}{2}(3-b)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}(3-2)^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

2. feladat

Bontsuk fel a $(3, 2, -5)$ vektort az $(1, 0, 4)$ vektorral párhuzamos, és arra merőleges komponensekre.

Legyen $\mathbf{v} = (3, 2, -5)$ és $\mathbf{a} = (1, 0, 4)$. A szükséges skaláris szorzatok:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) = -17$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1^2 + 0^2 + 4^2 = 17$$

A párhuzamos komponens:

$$\mathbf{v}_{||} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} = \frac{-17}{17}(1, 0, 4) = (-1, 0, -4)$$

Ebből a merőleges komponens:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{||} = (3, 2, -5) - (-1, 0, -4) = (4, 2, -1)$$

3. feladat

Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, mely párhuzamos az $(1,0,2)$ és $(3,1,-2)$ vektorokkal, és átmegy a $P(0,2,2)$ ponton.
Határozzuk meg a $Q(1,2,1)$ pont távolságát is ettől a síktól.

Legyen $\mathbf{a} = (1,0,2)$ és $\mathbf{b} = (3,1,-2)$. A kérdéses sík normálvektora merőleges ezekre, így a vektoriális szorzatuk megfelelő normálvektor:

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0 \cdot (2-) - 2 \cdot 1, 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-2), 1 \cdot 1 - 0 \cdot 3) = (-2, 8, 1)$$

A kérdéses sík egyenlete:

$$-2x + 8y + z = 18$$

A $Q(1,2,1)$ pont távolságához a sík Hesse-féle normálalakja:

$$\frac{-2x + 8y + z - 18}{\sqrt{(-2)^2 + 8^2 + 1^2}} = 0$$

Így a $Q(1,2,1)$ pont távolsága:

$$\left| \frac{-2 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 1 - 18}{\sqrt{69}} \right| = \left| \frac{-3}{\sqrt{69}} \right| = \frac{3}{\sqrt{69}} \approx 0{,}361$$

4. feladat

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 7z &= 8 \\ 2x + 6y + 4z &= 2 \\ 3x + 7y + 8z &= 7 \end{aligned}$$

Gauss-elimináció:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & 7 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 7 \end{array}\right] \overset{s_1/2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 8 & 7 \end{array}\right] \underset{s_3-3s_1}{\overset{s_2-2s_1}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right] \overset{s_2/(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right] \overset{s_3+2s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \overset{s_1-3s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Mivel a harmadik oszlopban nincs vezéregyes, így z szabad paraméter.

$$x = 7 - 5z, \qquad y = -2 + z, \qquad z \in \mathbb{R}$$

5. feladat

Számítsuk ki a $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

1. Determináns kiszámolása:
   $18 + 0 + 4 - 12 - 0 - 12 = -2$
2. Aldeterminánsok kiszámolása:
$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -4 & 2 & 6 \\ -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$
3. A kapott mátrixot transzponáljuk:
$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -2 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$
4. A kapott mátrixot sakktábla-szabály szerint szorozzuk:
$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 2 & 2 & -4 \\ -4 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$
5. Végül leosztjuk a determinánssal:
$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$