

Készülés a 2. zh-ra II.

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. április 14.

Feladatok

1. Legyen $z_1 = 5 - i$ és $z_2 = 3 + 2i$. Mennyi $\frac{z_1}{z_2} + \overline{z_1} - |z_2|$?
2. Számoljuk ki az alábbi mátrix sajátértékeit, és az egyik sajátértékhez adjuk meg a sajátvektorokat.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Írjuk fel az $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ függvény $P(\pi, \frac{4}{3}\pi)$ pontbeli érintősíkját.
4. Egy téglatest egy csúcsában összefutó éleinek összege 30 cm. Mennyi az élek hossza, ha a téglatest térfogata maximális?

1. feladat

Legyen $z_1 = 5 - i$ és $z_2 = 3 + 2i$. Mennyi $\frac{z_1}{z_2} + \overline{z_1} - |z_2|$?

Először csak az osztást számoljuk ki:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - i}{3 + 2i} = \frac{5 - i}{3 + 2i} \frac{3 - 2i}{3 - 2i} = \frac{15 - 10i - 3i + 2i^2}{3^2 + 2^2} = \frac{13 - 13i}{13} = 1 - i$$

Ezzel:

$$\frac{z_1}{z_2} + \overline{z_1} - |z_2| = 1 - i + 5 + i - \sqrt{3^2 + 2^2} = 6 - \sqrt{13} \approx 2,39$$

2. feladat

Számoljuk ki az alábbi mátrix sajátértékeit, és az egyik sajátértékhez adjuk meg a sajátvektorokat.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((4-\lambda)(2-\lambda)+2) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 10),$$

aminek a gyöke a $\lambda_1 = 1$ és a $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ egyenlet megoldásai:

$$\lambda_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$$

A $\lambda_1 = 1$ -hez tartozó sajátvektorok:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Így a sajátvektorok halmaza: $\{(5x, -3x, x) \mid x \neq 0\}$.

3. feladat

Írjuk fel az $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ függvény $P(\pi, \frac{4}{3}\pi)$ pontbeli érintősíkját.

Kiszámoljuk a függvényt és a parciális deriváltakat az adott pontban:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin(\sqrt{x^2 + y^2}) & f(\pi, \frac{4}{3}\pi) &= \sin(\frac{5}{3}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ f'_x(x, y) &= \cos(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} & f'_x(\pi, \frac{4}{3}\pi) &= \cos(\frac{5}{3}\pi) \frac{\pi}{\frac{5}{3}\pi} = \frac{3}{10} \\ f'_y(x, y) &= \cos(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} & f'_y(\pi, \frac{4}{3}\pi) &= \cos(\frac{5}{3}\pi) \frac{\frac{4}{3}\pi}{\frac{5}{3}\pi} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Így az érintő sík egyenlete:

$$\begin{aligned} z &= \frac{3}{10}(x - \pi) + \frac{2}{5}(y - \frac{4}{3}\pi) - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{3}{10}x + \frac{2}{5}y - z \\ 3,484 &= 0,3x + 0,4y - z \end{aligned}$$

4. feladat

Ha a, b, c jelöli az élek hosszúságait centiméterben ($a, b, c > 0$), akkor tudjuk, hogy $a + b + c = 30$, amiből $c = 30 - a - b$. A téglatest térfogata $abc = ab(30 - a - b)$, tehát az

$$f(a, b) = ab(30 - a - b) = 30ab - a^2b - ab^2$$

függvény maximumát keressük. A parciális deriváltak:

$$f'_a(a, b) = 30b - 2ab - b^2 = b(30 - 2a - b)$$

$$f'_b(a, b) = 30a - a^2 - 2ab = a(30 - a - 2b)$$

E két egyenletnek egyetlen nullhelye van a pozitív számok körében: $a = b = 10$, ekkor $c = 10$. A második deriváltak:

$$f''_{aa}(a, b) = -2b$$

$$f''_{ab}(a, b) = 30 - 2a - 2b$$

$$f''_{bb}(a, b) = -2a,$$

amiből a Hesse-determináns:

$$(-2b)(-2a) - (30 - 2a - 2b)^2 = 4ab - (30 - 2a - 2b)^2, \text{ mely}$$

a $(10, 10)$ pontban $400 - (-10)^2 = 300 > 0$, tehát itt lokális szélsőérték van.

Mivel $f''_{aa}(10, 10) = -20 < 0$, így lokális maximum.

Tehát maximális térfogat esetén mindegyik él 10 cm.