

12. gyakorlat

Leibniz-sorok és sorok konvergenciája

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. május 22.

1. feladat (a)

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ sor Leibniz típusú-e. Abszolút konvergens a sor?

1. feladat (a)

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ sor Leibniz típusú-e. Abszolút konvergencia a sor?

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor pontosan akkor Leibniz-sor, ha teljesül az alábbi három feltétel:

- ▶ a_n alternáló (váltakozó előjelű),
- ▶ $a_n \rightarrow 0$ (nullsorozat),
- ▶ $|a_n|$ monoton csökken.

Itt mindhárom feltétel teljesül, tehát ez Leibniz-sor, így konvergens.

Az abszolút konvergenciához a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergenciáját kell vizsgálni, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}},$$

ami divergens, mert tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $a > 1$. Így a sor nem abszolút konvergens.

1. feladat (b)

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$ sor Leibniz típusú-e. Abszolút konvergens a sor?

1. feladat (b)

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ sor Leibniz típusú-e. Abszolút konvergens a sor?

A sor alternáló, mivel $\frac{n}{n^2+1} > 0$.

A sor tagjainak határértéke:

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0.$$

A monotonitáshoz az $|a_n|$ -et és az $|a_{n+1}|$ -et kell összehasonlítani:

$$\begin{aligned} |a_n| - |a_{n+1}| &= \frac{n}{n^2+1} - \frac{n+1}{(n+1)^2+1} = \frac{n(n^2+2n+2) - (n+1)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \\ &= \frac{n^3+2n^2+2n - (n^3+n^2+n+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \frac{n^2+n-1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} > 0. \end{aligned}$$

azaz $|a_n| > |a_{n+1}|$, ami azt jelenti, hogy az $|a_n|$ sorozat monoton csökken. (A monotonitást jelen esetben egyszerűbben is láthattuk volna, ha a törtet n -nel egyszerűsítjük).

Tehát ez is egy Leibniz-sor, és így konvergens.

1. feladat (b) – folytatás

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}$ sor Leibniz típusú-e. Abszolút konvergens a sor?

Az abszolút konvergenciához a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$$

sor kell vizsgálni. Mivel

$$\frac{n}{n^2 + 1} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n},$$

és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ sor divergens, így a minoráns kritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1}$ sor is divergens. Tehát az eredeti sor nem abszolút konvergens.

2. feladat (a)

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens.

2. feladat (a)

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens.

A faktoriális miatt a hányados kritériummal érdemes próbálkozni:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

így a sor konvergens.

Mivel pozitív tagú, így abszolút konvergens is.

2. feladat (b)

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$ sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens.

2. feladat (b)

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$ sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens.

Gyökkritériumot alkalmazunk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3^n}}{\sqrt[n]{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n^3}} = \frac{3}{1} = 3 > 1,$$

így a sor divergens. Hányadoskritériummal hasonlóan kijött volna.

2. feladat (c)

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens.

2. feladat (c)

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens.

A sor tagjainak nagyságrendje:

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \approx \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n},$$

így a sor valószínűleg divergens. Ennek belátásához a minoráns kritériumot használjuk, így a sor tagjait alulról becsüljük:

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{n \cdot 2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n},$$

és a mivel az $\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, így a minoráns kritérium szerint a

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ sor is divergens.

2. feladat (d)

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens.

2. feladat (d)

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens.

A sor tagjainak nagyságrendje:

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} \approx \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}},$$

így a sor valószínűleg konvergens. Ennek belátásához a majoráns kritériumot használjuk, így a sor tagjait felülről becsüljük:

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}},$$

és a mivel a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ sor konvergens, így a majoráns kritérium szerint a

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ sor is konvergens.

Mivel pozitív tagú, így abszolút konvergens is.

2. feladat (e)

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens.

2. feladat (e)

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens.

Ez egy Leibniz-sor, mert a logaritmus függvény monoton nő (és $\ln(n) > 0$, ha $n \geq 2$).

Az abszolút konvergenciához a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$$

sor vizsgáljuk. Az $\ln(n) \leq n$ egyenlőtlenségből $\frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{1}{n}$. Mivel a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor

divergens, így a minoráns kritérium szerint a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ sor is divergens, azaz a

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ sor nem abszolút konvergens.

Tehát a sor feltételesen konvergens.

2. feladat (f)

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+4} \right)^n$ sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens.

2. feladat (f)

Döntsük el, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+4} \right)^n$ sor abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens.

Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy $a_n \rightarrow 0$, illetve $|a_n| \rightarrow 0$. Ellenőrizzük:

$$|a_n| = \left(\frac{n+1}{n+4} \right)^n = \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{4}{n}} \right)^n \rightarrow \frac{e}{e^4} = e^{-3} \neq 0,$$

így a sor divergens.

3. feladat

Tudjuk, hogy $\sin 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$. Ezt felhasználva számoljuk ki $\sin 1$ értékét 3 tizedesjegy pontossággal.

3. feladat

Tudjuk, hogy $\sin 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$. Ezt felhasználva számoljuk ki $\sin 1$ értékét 3 tizedesjegy pontossággal.

$$\sin 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \dots$$

Ez egy Leibniz-sor, így a sor egy részletösszegének az összegtől való eltérését a következő tag abszolút értékével becsülhetjük. Mivel három tizedesjegy pontossággal szeretnénk becsülni, így egy ezrednél kisebb hibát szeretnénk, azaz az $\frac{1}{5040}$ taggal becsülhetünk:

$$\left| \sin 1 - \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} \right) \right| = \left| \sin 1 - \frac{101}{120} \right| < \frac{1}{5040}$$

Tehát $\sin 1 \approx \frac{101}{120} = 0,84166666\dots$. Valójában $\sin 1 = 0,841470985\dots$, tehát az első három tizedesjegy tényleg azonos.

Házi feladatok

1. Döntsük el, hogy az alábbi sorok abszolút konvergenssek, feltételesen konvergenssek vagy divergenssek.

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3}}$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$$

2. Tudjuk, hogy $\cos(0,1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0,1^{2n}}{(2n)!}$. Ezt felhasználva számoljuk ki $\cos(0,1)$ értékét 3 tizedesjegy pontossággal.

Házi feladatok végeredményei

1. (a) abszolút konvergens,

(b) abszolút konvergens

2. $1 - \frac{0,1^2}{2} = 0,995$