2. gyakorlat

Vektorok és koordinátageometria

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. február 20.

1. feladat

Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (0, -1, 5)$ és $\mathbf{b} = (-2, 1, 2)$ vektorok skaláris szorzatát és a két vektor hajlásszögét.

1. feladat

Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (0, -1, 5)$ és $\mathbf{b} = (-2, 1, 2)$ vektorok skaláris szorzatát és a két vektor hajlásszögét.

A skaláris szorzat kiszámolása koordinátákkal:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{array}\right\} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Két vektor szöge:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}\right)$$

1. feladat

Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (0, -1, 5)$ és $\mathbf{b} = (-2, 1, 2)$ vektorok skaláris szorzatát és a két vektor hajlásszögét.

A skaláris szorzat kiszámolása koordinátákkal:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)\end{array}\right\} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Két vektor szöge:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}\right)$$

A skaláris szorzat:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 0 - 1 + 10 = 9$$

A vektorok hossza:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{0 + 1 + 25} = \sqrt{26}$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

A hajlásszög:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{9}{\sqrt{26} \cdot 3}\right) \approx 54^\circ$$

2. feladat

Bontsuk fel a $\mathbf{v} = (3, -1, 5)$ vektort az $\mathbf{a} = (3, 1, 0)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére.

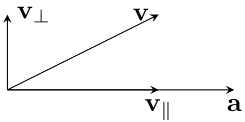
2. feladat

Bontsuk fel a $\mathbf{v} = (3, -1, 5)$ vektort az $\mathbf{a} = (3, 1, 0)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére.

A párhuzamos és a merőleges komponens képlete:

$$\mathbf{v}_{||} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{||}$$



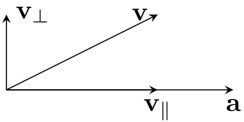
2. feladat

Bontsuk fel a $\mathbf{v} = (3, -1, 5)$ vektort az $\mathbf{a} = (3, 1, 0)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére.

A párhuzamos és a merőleges komponens képlete:

$$\mathbf{v}_{||} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}$$

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{||}$$



A szükséges skaláris szorzatok:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 9 - 1 = 8$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 3^2 + 1^2 + 0^2 = 9 + 1 = 10$$

A párhuzamos komponens:

$$\mathbf{v}_{||} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} = \frac{8}{10}(3; 1; 0) = (2{,}4; 0{,}8; 0)$$

Ebből a merőleges komponens:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{||} = (3, -1, 5) - (2{,}4; 0{,}8; 0) = (0{,}6; -1{,}8; 5)$$

3. feladat

Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 3, -2)$ és $\mathbf{b} = (-1, 2, 0)$ vektorok vektoriális szorzatát.

3. feladat

Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 3, -2)$ és $\mathbf{b} = (-1, 2, 0)$ vektorok vektoriális szorzatát.

A vektoriális szorzat kiszámolása koordinátákkal:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \end{array}\right\} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

3. feladat

Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 3, -2)$ és $\mathbf{b} = (-1, 2, 0)$ vektorok vektoriális szorzatát.

A vektoriális szorzat kiszámolása koordinátákkal:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)\\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)\end{array}\right\} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$\mathbf{a} = (1, 3, -2)$$
$$\mathbf{b} = (-1, 2, 0)$$

$$\begin{aligned}(1, 3, -2) \times (-1, 2, 0) &= (3 \cdot 0 - (-2) \cdot 2, (-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 0, 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)) = \\ &= (4, 2, 5)\end{aligned}$$

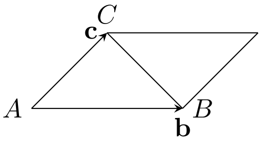
4. feladat

Számítsuk ki az $A(-1, 0, 2), B(2, 1, 0), C(3, 2, 1)$ csúcspontú háromszög területét.

4. feladat

Számítsuk ki az $A(-1,0,2), B(2,1,0), C(3,2,1)$ csúcspontú háromszög területét.

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{AB} = (3,1,-2)$$
$$\mathbf{c} = \overrightarrow{AC} = (4,2,-1)$$



Az ABC háromszög területe fele a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ által kifeszített paralelogramma területének. Utóbbi pontosan a

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (-1-(-4), -8-(-3), 6-4) = (3,-5,2)$$

vektor hossza, ami

$$|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 2^2} = \sqrt{9+25+4} = \sqrt{38}.$$

Így a háromszög területe $\dfrac{\sqrt{38}}{2} \approx 3{,}08.$

5. feladat

Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (2, -1, 5)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 4)$ és $\mathbf{c} = (0, 2, -3)$ vektorok $\mathbf{abc}$ vegyes szorzatát, valamint a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

5. feladat

Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (2, -1, 5)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 4)$ és $\mathbf{c} = (0, 2, -3)$ vektorok $\mathbf{abc}$ vegyes szorzatát, valamint a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

A vegyes szorzat kiszámolása koordinátákkal:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \\ \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \end{array}\right\} \mathbf{abc} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

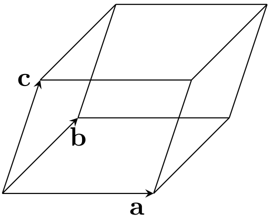
5. feladat

Határozzuk meg az $\mathbf{a} = (2, -1, 5)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 4)$ és $\mathbf{c} = (0, 2, -3)$ vektorok $\mathbf{abc}$ vegyes szorzatát, valamint a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

A vegyes szorzat kiszámolása koordinátákkal:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \\ \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \end{array}\right\} \mathbf{abc} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{a} = (2, -1, 5) \\ \mathbf{b} = (-1, 0, 4) \\ \mathbf{c} = (0, 2, -3) \end{array}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{abc} &= 2\cdot 0\cdot(-3) + (-1)\cdot 4\cdot 0 + 5\cdot(-1)\cdot 2 - 5\cdot 0\cdot 0 - (-1)\cdot(-1)\cdot(-3) - 2\cdot 4\cdot 2 = \\ &= 0 + 0 - 10 - 0 + 3 - 16 = -23 \end{aligned}$$

Az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata ennek abszolút értéke, azaz 23.

6. feladat

Írjuk fel a $P_0(1, 2, 4)$ ponton átmenő $\mathbf{n} = (2, 1, 3)$ normálvektorú sík egyenletét.

6. feladat

Írjuk fel a $P_0(1,2,4)$ ponton átmenő $\mathbf{n} = (2,1,3)$ normálvektorú sík egyenletét.
Az $\mathbf{n}$ normálvektorú sík egyenlete

$$2x + y + 3z = c,$$

ahol a c konstans úgy határozzuk meg, hogy a P_0 pont rajta legyen a síkon. Azaz

$$c = 2 \cdot 1 + 2 + 3 \cdot 4 = 16,$$

így a kérdéses sík egyenlete

$$2x + y + 3z = 16.$$

7. feladat

Határozzuk meg a $P(3,4,6)$ ponton átmenő $\mathbf{n} = (1,-2,1)$ normálvektorú sík egyenletét, és számítsuk ki a $Q(-1,5,4)$ pontnak ettől a síktól vett távolságát.

7. feladat

Határozzuk meg a $P(3,4,6)$ ponton átmenő $\mathbf{n} = (1,-2,1)$ normálvektorú sík egyenletét, és számítsuk ki a $Q(-1,5,4)$ pontnak ettől a síktól vett távolságát.

A sík egyenlete az előző feladathoz hasonlóan:

$$x - 2y + z = 1$$

Ennek a Hesse-féle normálegyenlete:

$$\frac{x - 2y + z - 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = 0$$

A Q pontnak ettől a síktól való távolságát a fenti egyenlet bal oldalának abszolút értéke adja meg:

$$\left| \frac{-1 - 2 \cdot 5 + 4 - 1}{\sqrt{6}} \right| = \left| \frac{-8}{\sqrt{6}} \right| = \frac{8}{\sqrt{6}} \approx 3{,}27$$

8. feladat

Írjuk fel a $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$ és $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 3)$ vektorokkal párhuzamos, a $P(2, 3, 7)$ ponton átmenő sík egyenletét.

8. feladat

Írjuk fel a $\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$ és $\mathbf{v}_2 = (2, 4, 3)$ vektorokkal párhuzamos, a $P(2, 3, 7)$ ponton átmenő sík egyenletét.

Mivel a vektoriális szorzat a két tényezőre merőleges vektor, így ezen sík egy normálvektora

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (6 - (-4), -2 - 3, 4 - 4) = (10, -5, 0).$$

Így a sík egyenlete

$$10x - 5y = 5,$$

amivel ekvivalens, hogy

$$2x - y = 1.$$

9. feladat

Mi az $A(1,5,2)$, $B(3,6,0)$, $C(0,8,4)$ pontokon átmenő sík egyenlete?

9. feladat

Mi az $A(1,5,2)$, $B(3,6,0)$, $C(0,8,4)$ pontokon átmenő sík egyenlete?

$$\mathbf{b} = \overrightarrow{AB} = (2,1,-2)$$
$$\mathbf{c} = \overrightarrow{AC} = (-1,3,2)$$

Ezzel az előző feladathoz hasonlóan a sík normálvektora:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (2-(-6), 2-4, 6-(-1)) = (8,-2,7).$$

Így a sík egyenlete

$$8x - 2y + 7z = 12.$$

10. feladat

Mutassuk meg, hogy a $3x + y - z = 1$ és a $6x + 2y - 2z = 1$ egyenletű síkok párhuzamosak, és határozzuk meg a két sík távolságát.

10. feladat

Mutassuk meg, hogy a $3x + y - z = 1$ és a $6x + 2y - 2z = 1$ egyenletű síkok párhuzamosak, és határozzuk meg a két sík távolságát.

A síkok normálvektorai:

$$3x + y - z = 1 \Rightarrow \mathbf{n}_1 = (3, 1, -1)$$
$$6x + 2y - 2z = 1 \Rightarrow \mathbf{n}_2 = (6, 2, -2)$$

Látható, hogy $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1$, azaz a két sík valóban párhuzamos.

A két sík távolságának a kiszámításához válasszunk egy Q pontot az első síkról.
A $Q(0, 1, 0)$ pont rajta van az első síkon, mert kielégíti az egyenletet:
$3 \cdot 0 + 1 - 0 = 1.$
A két párhuzamos sík távolsága a Q pont távolsága a második síktól, amihez a második sík Hesse-féle normálegyenlete:

$$\frac{6x + 2y - 2z - 1}{\sqrt{6^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 0$$

És így a távolság:

$$\left| \frac{6 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1}{\sqrt{44}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{44}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{11}} \approx 0{,}151$$

Bónuszfeladatok

Tükrözzük a $\mathbf{v} = (-2, 6, 1)$ vektort az $\mathbf{a} = (1, -1, 0)$ vektorra. Határozzuk meg a tükörkép vektor koordinátáit.

Határozzuk meg a $P_0(-2, -1, 8)$ ponton átmenő és az

$$x + 1 = -\frac{y}{2} = \frac{3 - z}{3}$$

egyenletű egyenesre merőleges síknak az egyenessel való döféspontját.

Házi feladatok

Bontsuk fel a $\mathbf{v} = (3, 5, 7)$ vektort az $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére.

Írjuk fel a $P(3, -1, 2)$ ponton átmenő $\mathbf{n} = (2, 3, -4)$ normálvektorú sík egyenletét, és számítsuk ki a $Q(0, 3, 1)$ pontnak ettől a síktól vett távolságát.

Házi feladatok végeredményei

$\mathbf{v}_{||} = (1, 2, -1)$
$\mathbf{v}_{\perp} = (2, 3, 8)$

A sík egyenlete: $2x + 3y - 4z = -5$.
A Q pont távolsága: $\dfrac{10}{\sqrt{29}} \approx 1{,}86$.