3. gyakorlat

Lineáris összefüggőség és mátrixok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. február 27.

1. feladat (a)

Lineárisan függetlenek-e a $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ vektorok?

1. feladat (a)

Lineárisan függetlenek-e a $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ vektorok?

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

egyenlőségből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

1. feladat (a)

Lineárisan függetlenek-e a $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ vektorok?

A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

egyenlőségből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

azaz

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből az első egyenlet kétszeresét kivonva kapjuk, hogy $-\lambda_2 = 0$, azaz $\lambda_2 = 0$. Ekkor a második egyenletből $2\lambda_3 = 0$, azaz $\lambda_3 = 0$. Így az első egyenletből $\lambda_1 = 0$. Tehát (1)-ből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ami azt jelenti, hogy ezen vektorok lineárisan függetlenek.

1. feladat (b)

Lineárisan függetlenek-e a $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ vektorok?

1. feladat (b)

Lineárisan függetlenek-e a $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ vektorok?

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

azaz

$$\begin{array}{rl} 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 = 0 & \Rightarrow \lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1 \Rightarrow \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 & \end{array} \quad \begin{array}{r} 2\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \\ 3\lambda_1 - 3 \cdot \frac{3}{2}\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \Rightarrow \\ -\frac{3}{2}\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \end{array}$$

A második egyenlet az első (-3)-szorosa, tehát ez csak egy egyenlet. Ennek egy (nemnulla) megoldása például a $\lambda_1 = 2, \lambda_3 = -1$. Ekkor $\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1 = 3$. Ellenőrizhető, hogy ez az eredeti egyenletrendszer megoldása is, azaz

$$2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tehát ezen vektorok lineárisan összefüggőek (nem lineárisan függetlenek).

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix típusa $m \times k$, ha m sora és k oszlopa van.
Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixok szorozhatóságának feltétele: $k_1 = m_2$.

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix típusa $m \times k$, ha m sora és k oszlopa van.
Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixok szorozhatóságának feltétele: $k_1 = m_2$.

A mátrixok típusa:

$$\mathbf{A} : 2 \times 2, \qquad \mathbf{B} : 3 \times 2, \qquad \mathbf{C} : 2 \times 3, \qquad \mathbf{D} : 3 \times 1$$

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix típusa $m \times k$, ha m sora és k oszlopa van.
Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixok szorozhatóságának feltétele: $k_1 = m_2$.

A mátrixok típusa:

$$\mathbf{A} : 2 \times 2, \qquad \mathbf{B} : 3 \times 2, \qquad \mathbf{C} : 2 \times 3, \qquad \mathbf{D} : 3 \times 1$$

Így a következő szorzatok értelmesek:

$$\mathbf{AC}, \quad \mathbf{BA}, \quad \mathbf{BC}, \quad \mathbf{CB}, \quad \mathbf{CD} \quad (\text{és esetleg } \mathbf{AA})$$

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix típusa $m \times k$, ha m sora és k oszlopa van.
Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixok szorozhatóságának feltétele: $k_1 = m_2$.

A mátrixok típusa:

$$\mathbf{A} : 2 \times 2, \qquad \mathbf{B} : 3 \times 2, \qquad \mathbf{C} : 2 \times 3, \qquad \mathbf{D} : 3 \times 1$$

Így a következő szorzatok értelmesek:

$$\mathbf{AC}, \quad \mathbf{BA}, \quad \mathbf{BC}, \quad \mathbf{CB}, \quad \mathbf{CD} \quad (\text{és esetleg } \mathbf{AA})$$

AC

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix típusa $m \times k$, ha m sora és k oszlopa van.
Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixok szorozhatóságának feltétele: $k_1 = m_2$.

A mátrixok típusa:

$$\mathbf{A} : 2 \times 2, \qquad \mathbf{B} : 3 \times 2, \qquad \mathbf{C} : 2 \times 3, \qquad \mathbf{D} : 3 \times 1$$

Így a következő szorzatok értelmesek:

$$\mathbf{AC}, \quad \mathbf{BA}, \quad \mathbf{BC}, \quad \mathbf{CB}, \quad \mathbf{CD} \quad (\text{és esetleg } \mathbf{AA})$$

$$\begin{array}{lcc} \mathbf{AC} & & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix típusa $m \times k$, ha m sora és k oszlopa van.
Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixok szorozhatóságának feltétele: $k_1 = m_2$.

A mátrixok típusa:

$$\mathbf{A} : 2 \times 2, \qquad \mathbf{B} : 3 \times 2, \qquad \mathbf{C} : 2 \times 3, \qquad \mathbf{D} : 3 \times 1$$

Így a következő szorzatok értelmesek:

$$\mathbf{AC}, \quad \mathbf{BA}, \quad \mathbf{BC}, \quad \mathbf{CB}, \quad \mathbf{CD} \quad (\text{és esetleg } \mathbf{AA})$$

AC

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 3 & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix típusa $m \times k$, ha m sora és k oszlopa van.
Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixok szorozhatóságának feltétele: $k_1 = m_2$.

A mátrixok típusa:

$$\mathbf{A} : 2 \times 2, \qquad \mathbf{B} : 3 \times 2, \qquad \mathbf{C} : 2 \times 3, \qquad \mathbf{D} : 3 \times 1$$

Így a következő szorzatok értelmesek:

$$\mathbf{AC}, \quad \mathbf{BA}, \quad \mathbf{BC}, \quad \mathbf{CB}, \quad \mathbf{CD} \quad (\text{és esetleg } \mathbf{AA})$$

AC

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 3 & 10 \\ & & \end{bmatrix} \end{array}$$

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix típusa $m \times k$, ha m sora és k oszlopa van.
Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixok szorozhatóságának feltétele: $k_1 = m_2$.

A mátrixok típusa:

$$\mathbf{A} : 2 \times 2, \qquad \mathbf{B} : 3 \times 2, \qquad \mathbf{C} : 2 \times 3, \qquad \mathbf{D} : 3 \times 1$$

Így a következő szorzatok értelmesek:

$$\mathbf{AC}, \quad \mathbf{BA}, \quad \mathbf{BC}, \quad \mathbf{CB}, \quad \mathbf{CD} \quad (\text{és esetleg } \mathbf{AA})$$

AC

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 4 & & \end{bmatrix} \end{array}$$

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix típusa $m \times k$, ha m sora és k oszlopa van.
Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixok szorozhatóságának feltétele: $k_1 = m_2$.

A mátrixok típusa:

$$\mathbf{A} : 2 \times 2, \qquad \mathbf{B} : 3 \times 2, \qquad \mathbf{C} : 2 \times 3, \qquad \mathbf{D} : 3 \times 1$$

Így a következő szorzatok értelmesek:

$$\mathbf{AC}, \quad \mathbf{BA}, \quad \mathbf{BC}, \quad \mathbf{CB}, \quad \mathbf{CD} \quad (\text{és esetleg } \mathbf{AA})$$

$$\begin{array}{cc} \mathbf{AC} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 4 & 2 & \end{bmatrix} \end{array}$$

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix típusa $m \times k$, ha m sora és k oszlopa van.
Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixok szorozhatóságának feltétele: $k_1 = m_2$.

A mátrixok típusa:

$$\mathbf{A} : 2 \times 2, \qquad \mathbf{B} : 3 \times 2, \qquad \mathbf{C} : 2 \times 3, \qquad \mathbf{D} : 3 \times 1$$

Így a következő szorzatok értelmesek:

$$\mathbf{AC}, \quad \mathbf{BA}, \quad \mathbf{BC}, \quad \mathbf{CB}, \quad \mathbf{CD} \quad (\text{és esetleg } \mathbf{AA})$$

AC

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix típusa $m \times k$, ha m sora és k oszlopa van.
Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixok szorozhatóságának feltétele: $k_1 = m_2$.

A mátrixok típusa:

$$\mathbf{A} : 2 \times 2, \qquad \mathbf{B} : 3 \times 2, \qquad \mathbf{C} : 2 \times 3, \qquad \mathbf{D} : 3 \times 1$$

Így a következő szorzatok értelmesek:

$$\mathbf{AC}, \quad \mathbf{BA}, \quad \mathbf{BC}, \quad \mathbf{CB}, \quad \mathbf{CD} \quad \text{(és esetleg } \mathbf{AA}\text{)}$$

AC

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

BA

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix} \end{array}$$

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix típusa $m \times k$, ha m sora és k oszlopa van.
Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixok szorozhatóságának feltétele: $k_1 = m_2$.

A mátrixok típusa:

$$\mathbf{A} : 2 \times 2, \qquad \mathbf{B} : 3 \times 2, \qquad \mathbf{C} : 2 \times 3, \qquad \mathbf{D} : 3 \times 1$$

Így a következő szorzatok értelmesek:

$$\mathbf{AC}, \quad \mathbf{BA}, \quad \mathbf{BC}, \quad \mathbf{CB}, \quad \mathbf{CD} \quad \text{(és esetleg } \mathbf{AA}\text{)}$$

AC

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

BA

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & \\ & \\ & \end{bmatrix} \end{array}$$

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix típusa $m \times k$, ha m sora és k oszlopa van.
Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixok szorozhatóságának feltétele: $k_1 = m_2$.

A mátrixok típusa:

$$\mathbf{A} : 2 \times 2, \qquad \mathbf{B} : 3 \times 2, \qquad \mathbf{C} : 2 \times 3, \qquad \mathbf{D} : 3 \times 1$$

Így a következő szorzatok értelmesek:

$$\mathbf{AC}, \quad \mathbf{BA}, \quad \mathbf{BC}, \quad \mathbf{CB}, \quad \mathbf{CD} \quad (\text{és esetleg } \mathbf{AA})$$

AC

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

BA

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ & \\ & \end{bmatrix} \end{array}$$

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix típusa $m \times k$, ha m sora és k oszlopa van.
Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixok szorozhatóságának feltétele: $k_1 = m_2$.

A mátrixok típusa:

$$\mathbf{A} : 2 \times 2, \qquad \mathbf{B} : 3 \times 2, \qquad \mathbf{C} : 2 \times 3, \qquad \mathbf{D} : 3 \times 1$$

Így a következő szorzatok értelmesek:

$$\mathbf{AC}, \quad \mathbf{BA}, \quad \mathbf{BC}, \quad \mathbf{CB}, \quad \mathbf{CD} \quad \text{(és esetleg } \mathbf{AA}\text{)}$$

AC

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

BA

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & \\ & \end{bmatrix} \end{array}$$

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix típusa $m \times k$, ha m sora és k oszlopa van.
Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixok szorozhatóságának feltétele: $k_1 = m_2$.

A mátrixok típusa:

$$\mathbf{A} : 2 \times 2, \qquad \mathbf{B} : 3 \times 2, \qquad \mathbf{C} : 2 \times 3, \qquad \mathbf{D} : 3 \times 1$$

Így a következő szorzatok értelmesek:

$$\mathbf{AC}, \quad \mathbf{BA}, \quad \mathbf{BC}, \quad \mathbf{CB}, \quad \mathbf{CD} \quad (\text{és esetleg } \mathbf{AA})$$

AC

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

BA

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 0 \\ & \end{bmatrix} \end{array}$$

2. feladat

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egy mátrix típusa $m \times k$, ha m sora és k oszlopa van.
Az $m_1 \times k_1$-es és az $m_2 \times k_2$-as mátrixok szorozhatóságának feltétele: $k_1 = m_2$.

A mátrixok típusa:

$$\mathbf{A} : 2 \times 2, \qquad \mathbf{B} : 3 \times 2, \qquad \mathbf{C} : 2 \times 3, \qquad \mathbf{D} : 3 \times 1$$

Így a következő szorzatok értelmesek:

$$\mathbf{AC}, \quad \mathbf{BA}, \quad \mathbf{BC}, \quad \mathbf{CB}, \quad \mathbf{CD} \quad (\text{és esetleg } \mathbf{AA})$$

AC

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 3 & 10 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

BA

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

2. feladat folytatás

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CB} = \begin{bmatrix} -2 & 18 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CD} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AA} = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

A mátrixok transzponáltjai:

2. feladat folytatás

Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsuk ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CB} = \begin{bmatrix} -2 & 18 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CD} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AA} = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

A mátrixok transzponáltjai:

$$\mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C}^\top = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D}^\top = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. feladat

Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse az i-edik gyárban egy nap alatt előállított j-edik termék számát. A $\mathbf{p}$ vektor j-edik koordinátája a j-edik termék egységára.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Mi a jelentése a következő szorzatoknak?

(a) $\mathbf{Ap}$;

(b) $\mathbf{Ae}_i$, ahol $\mathbf{e}_i$ a standard bázisvektor;

(c) $\mathbf{1}^\top \mathbf{A}$, ahol $\mathbf{1}$ az az oszlopvektor, melynek minden koordinátája 1.

Hasonlóan írjuk fel mátrixszorzás segítségével azt a vektort, melynek koordinátái megadják

(d) az egyes gyárak által termelt termékek mennyiségeit;

(e) az i-edik gyár által gyártott termékek számát.

3. feladat (a)

Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse az i-edik gyárban egy nap alatt előállított j-edik termék számát. A $\mathbf{p}$ vektor j-edik koordinátája a j-edik termék egységára.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Mi a jelentése az $\mathbf{Ap}$ szorzatnak?

3. feladat (a)

Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse az i-edik gyárban egy nap alatt előállított j-edik termék számát. A $\mathbf{p}$ vektor j-edik koordinátája a j-edik termék egységára.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Mi a jelentése az $\mathbf{Ap}$ szorzatnak?

$$\mathbf{Ap} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 450 \\ 290 \\ 740 \end{bmatrix}$$

Az első koordináta az $\mathbf{A}$ mátrix első sorának a megfelelő egységárral vett szorzatainak összege, azaz az első gyár által termelt érték:

$$4 \cdot 40 + 0 \cdot 60 + 5 \cdot 50 + 2 \cdot 20 = 450.$$

A második koordináta hasonló, csak a második gyárra vonatkozóan.

Az $\mathbf{Ap}$ szorzat koordinátái megadják az egyes gyárak által termelt értékeket.

3. feladat (b)

Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse az i-edik gyárban egy nap alatt előállított j-edik termék számát. A $\mathbf{p}$ vektor j-edik koordinátája a j-edik termék egységára.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Mi a jelentése az $\mathbf{A}\mathbf{e}_i$ szorzatnak, ahol $\mathbf{e}_i$ a standard bázisvektor?

3. feladat (b)

Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse az i-edik gyárban egy nap alatt előállított j-edik termék számát. A $\mathbf{p}$ vektor j-edik koordinátája a j-edik termék egységára.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Mi a jelentése az $\mathbf{A}\mathbf{e}_i$ szorzatnak, ahol $\mathbf{e}_i$ a standard bázisvektor?
$i = 1$-re:

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ez éppen az $\mathbf{A}$ mátrix első oszlopa, azaz az első termékből termelt mennyiségek az egyes gyárakban.

Az $\mathbf{A}\mathbf{e}_2$ szorzat az $\mathbf{A}$ mátrix második oszlopát adja, azaz a második termékből termelt mennyiségeket.

Általában az $\mathbf{A}\mathbf{e}_i$ megadja az i-edik termékből termelt mennyiségeket az egyes gyárakban.

3. feladat (c)

Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse az i-edik gyárban egy nap alatt előállított j-edik termék számát. A $\mathbf{p}$ vektor j-edik koordinátája a j-edik termék egységára.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Mi a jelentése az $\mathbf{1}^\top \mathbf{A}$ szorzatnak, ahol $\mathbf{1}$ az az oszlopvektor, melynek minden koordinátája 1.

3. feladat (c)

Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse az i-edik gyárban egy nap alatt előállított j-edik termék számát. A $\mathbf{p}$ vektor j-edik koordinátája a j-edik termék egységára.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Mi a jelentése az $\mathbf{1}^\top \mathbf{A}$ szorzatnak, ahol $\mathbf{1}$ az az oszlopvektor, melynek minden koordinátája 1.

$$\mathbf{1}^\top \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

Ez pontosan az egyes oszlopokban álló számok összege, azaz az $\mathbf{1}^\top \mathbf{A}$ vektor koordinátái megadják az egyes termékekből összesen termelt mennyiségeket.

3. feladat (d)

Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse az i-edik gyárban egy nap alatt előállított j-edik termék számát. A $\mathbf{p}$ vektor j-edik koordinátája a j-edik termék egységára.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan írjuk fel mátrixszorzás segítségével azt a vektort, melynek koordinátái megadják az egyes gyárak által termelt termékek mennyiségeit.

3. feladat (d)

Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse az i-edik gyárban egy nap alatt előállított j-edik termék számát. A $\mathbf{p}$ vektor j-edik koordinátája a j-edik termék egységára.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan írjuk fel mátrixszorzás segítségével azt a vektort, melynek koordinátái megadják az egyes gyárak által termelt termékek mennyiségeit.

Az egyes gyárak által termelt termékek mennyisége a sorokban álló számok összege, melyet a (c) feladatrészhez hasonlóan megkapunk az $\mathbf{1}$ vektor segítségével (bár itt most ez a vektor 4 dimenziós):

$$\mathbf{A1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 17 \end{bmatrix}$$

3. feladat (e)

Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse az i-edik gyárban egy nap alatt előállított j-edik termék számát. A $\mathbf{p}$ vektor j-edik koordinátája a j-edik termék egységára.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan írjuk fel mátrixszorzás segítségével azt a vektort, melynek koordinátái megadják az i-edik gyár által gyártott termékek számát.

3. feladat (e)

Egy cég három gyárában négyféle terméket állít elő. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse az i-edik gyárban egy nap alatt előállított j-edik termék számát. A $\mathbf{p}$ vektor j-edik koordinátája a j-edik termék egységára.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan írjuk fel mátrixszorzás segítségével azt a vektort, melynek koordinátái megadják az i-edik gyár által gyártott termékek számát.

Az első gyár által termelt termékek száma az első sorban van, ehhez az $\mathbf{e}_1^\top$ vektorral jobbról kell szorozni $\mathbf{A}$-t:

$$\mathbf{e}_1^\top \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Az i-edik gyár által termelt termékek számát értelemszerűen az $\mathbf{e}_i^\top \mathbf{A}$ szorzat adja meg.

Bónuszfeladatok

Tekintsük az $\mathbb{R}^3$ tér

$$\mathbf{a} = \big(1,\, 3,\, 4\big), \qquad \mathbf{b} = \big(2,\, 7,\, 2\big), \qquad \mathbf{c} = \big(-1,\, 2,\, 1\big)$$

vektorait. Döntsük el, hogy az $\mathbf{x} = \big(-3,\, 1,\, -2\big)$ vektor benne van-e a vektorok által generált $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ altérben.

Igazoljuk, hogy az $\mathbb{R}^4$ tér

$$M = \big\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\big|\; x_1 + 3x_2 = 5x_3 - x_4 \big\}$$

részhalmaza egy altér $\mathbb{R}^4$-ben. Hány dimenziós ez az altér? Adjuk meg egy bázisát.

Határozzuk meg mindazon $\mathbf{B}$ mátrixokat, amelyek az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixszal felcserélhetők (azaz $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$).

Házi feladat

Egy kereskedelmi cég n féle terméket forgalmaz m boltjában. Az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} eleme jelentse a j-edik termék i-edik boltban egy hónap alatt forgalmazott mennyiségét. A $\mathbf{p}$ vektor p_i koordinátája jelölje az i-edik termék egységárát. Az $\mathbf{A}$ mátrix, a $\mathbf{p}$ vektor, az $\mathbf{e}_i$ (a standard bázisvektor), valamint az $\mathbf{1}$ (az az oszlopvektor, amelynek minden koordinátája 1) vektorok segítségével írjuk fel:

(a) a havi bevételt boltonként;

(b) az r-edik bolt havi bevételét;

(c) az r-edik boltban a q-adik áruból eladott mennyiséget;

(d) az egy hónap alatt eladott termékmennyiséget termékenként;

(e) a havi összbevételt.

Házi feladat megoldása

(a) A 3. feladathoz hasonlóan $\mathbf{Ap}$, melynek a koordinátái adják meg az egyes boltok bevételeit.

(b) Ha csak az r-edik bolt bevételére vagyunk kíváncsiak, akkor az előzőt balról meg kell szorozni az $\mathbf{e}_r$ bázisvektor transzponáltjával: $\mathbf{e}_r^\top \mathbf{Ap}$.

(c) Ez pontosan az $\mathbf{A}$ mátrix a_{rq} eleme. Ezt a bázisvektorok segítségével a következőképpen írhatjuk fel: $\mathbf{e}_r^\top \mathbf{A}\mathbf{e}_q$.

(d) Ezt úgy kapjuk, hogy összeadjuk az $\mathbf{A}$ mátrix sorait. Ezt az $\mathbf{1}$ oszlopvektor transzponáltjával való beszorzással érjük el: $\mathbf{1}^\top \mathbf{A}$.

(e) Az előző mennyiséget kell az egységárakkal beszorozni: $\left(\mathbf{1}^\top \mathbf{A}\right) \mathbf{p}$, avagy a boltonkénti havi bevételt összegezni: $\mathbf{1}^\top (\mathbf{Ap})$, mely két szorzat megegyezik a mátrixszorzás asszociativitása miatt.