6. gyakorlat

Komplex számok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. március 20.

1. feladat

Legyen $z_1 = 3 + 2i$ és $z_2 = 1 - 3i$. Számoljuk ki az alábbiakat:

$$z_1 + z_2, \qquad z_1 - z_2, \qquad z_1 z_2, \qquad \overline{z_1}, \qquad |z_1|, \qquad \frac{z_1}{z_2}.$$

1. feladat

Legyen $z_1 = 3 + 2i$ és $z_2 = 1 - 3i$. Számoljuk ki az alábbiakat:

$$z_1 + z_2, \qquad z_1 - z_2, \qquad z_1 z_2, \qquad \overline{z_1}, \qquad |z_1|, \qquad \frac{z_1}{z_2}.$$

A szorzásnál használjuk, hogy $i^2 = -1$, míg az osztásnál a nevező konjugáltjával bővítjük a törtet:

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (3 + 2i) + (1 - 3i) = (3 + 1) + (2 - 3)i = 4 - i \\
z_1 - z_2 &= (3 + 2i) - (1 - 3i) = (3 - 1) + (2 - (-3))i = 2 + 5i \\
z_1 z_2 &= (3 + 2i) \cdot (1 - 3i) = 3 - 9i + 2i - 6i^2 = 9 - 7i \\
\overline{z_1} &= 3 - 2i \\
|z_1| &= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{3 + 2i}{1 - 3i} = \frac{(3 + 2i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{3 + 9i + 2i + 6i^2}{1 + 3i - 3i - 9i^2} = \frac{-3 + 11i}{10} = \\
&= -0{,}3 + 1{,}1i
\end{aligned}$$

2. feladat (a)

Keressük meg a $z^4 + z^2 - 6$ polinom gyökeit a komplex számok körében.

2. feladat (a)

Keressük meg a $z^4 + z^2 - 6$ polinom gyökeit a komplex számok körében.

Vezessük be az $y = z^2$ változót. Ebben a változóban ez egy másodfokú polinom: $y^2 + y - 6$, melynek gyökei 2 és -3.

$y = 2$ esetén $z = \pm\sqrt{2}$.

$y = -3$ esetén nincs megfelelő valós z, de a komplex számok körében van:
$z = \pm\sqrt{3}i$
általában negatív q valós szám esetén $\sqrt{q} = \pm\sqrt{-q}i$.

Tehát a polinom gyökei: $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i$.

2. feladat (b)

Keressük meg a $z^3 - 6z^2 + 13z$ polinom gyökeit a komplex számok körében.

2. feladat (b)

Keressük meg a $z^3 - 6z^2 + 13z$ polinom gyökeit a komplex számok körében.

Mivel nincs konstanstag, így $z_1 = 0$ gyök. Ezt kiemelve:

$$z^3 - 6z^2 + 13z = z(z^2 - 6z + 13)$$

Bár a másodfokú polinomnak negatív a diszkrimánsa, és így nincsenek valós gyökei, a komlex számok körében van két gyöke, melyet a szokásos megoldóképlettel számolhatunk:

$$z_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i,$$

ahol felhasználtuk, hogy negatív q valós szám esetén $\sqrt{q} = \pm\sqrt{-q}i$.
Tehát a polinom gyökei: 0, $3 + 2i$ és $3 - 2i$.

3. feladat

Legyen $z = -1 + i$. Írjuk fel trigonometrikus alakban, majd számoljuk ki a negyedik hatványát és az ötödik gyökeit.

3. feladat

Legyen $z = -1 + i$. Írjuk fel trigonometrikus alakban, majd számoljuk ki a negyedik hatványát és az ötödik gyökeit.

A $z = -1 + i$ komplex szám
abszolút értéke: $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,
argumentuma: $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{-1} + \pi = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = \dfrac{3\pi}{4}$, ahol a $+\pi$ tag azért kell, mert $\operatorname{Re} z = -1 < 0$. Így a trigonometrikus alak:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Ennek segítségével:

$$z^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 \left(\cos\left(4 \cdot \tfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(4 \cdot \tfrac{3\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\cos(3\pi) + i\sin(3\pi)\right) =$$
$$= 4\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -4$$

3. feladat – folytatás

Legyen $z = -1 + i$. Írjuk fel trigonometrikus alakban, majd számoljuk ki a negyedik hatványát és az ötödik gyökeit.

A trigonometrikus alak:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)\right)$$

A z komplex számnak öt z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 ötödik gyöke van:

$$z_1 = \sqrt[5]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{5}\right)\right) = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{20}\right) + i\sin\left(\tfrac{3\pi}{20}\right)\right)$$

$$z_2 = \sqrt[5]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi}{5}\right)\right) = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\tfrac{11\pi}{20}\right) + i\sin\left(\tfrac{11\pi}{20}\right)\right)$$

$$z_3 = \sqrt[5]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 4\pi}{5}\right)\right) = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\tfrac{19\pi}{20}\right) + i\sin\left(\tfrac{19\pi}{20}\right)\right)$$

$$z_4 = \sqrt[5]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 6\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 6\pi}{5}\right)\right) = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\tfrac{27\pi}{20}\right) + i\sin\left(\tfrac{27\pi}{20}\right)\right)$$

$$z_5 = \sqrt[5]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 8\pi}{5}\right)\right) = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\tfrac{35\pi}{20}\right) + i\sin\left(\tfrac{35\pi}{20}\right)\right)$$

4. feladat

Határozzuk meg a $-8i$ komplex szám köbgyökeit.

4. feladat

Határozzuk meg a $-8i$ komplex szám köbgyökeit.

Bár a feladat nem kérte, de most is érdemes áttérni trigonometrikus alakra:
$r = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = 8$
$\varphi = -\frac{\pi}{2}$, mert $\operatorname{Re} z = 0$ és $\operatorname{Im} z < 0$

$$-8i = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Így a köbgyökök:

$$z_1 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i$$

$$z_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = 2i$$

$$z_3 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\tfrac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\tfrac{7\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= -\sqrt{3} - i$$

5. feladat (a)

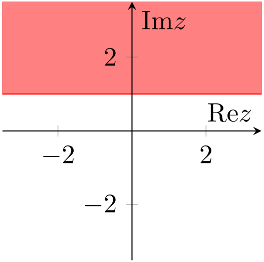
Ábrázoljuk a komplex számsíkon a $\mathrm{Im}\,(z+i) \geq 2$ halmazt.

5. feladat (a)

Ábrázoljuk a komplex számsíkon a $\mathrm{Im}\,(z+i) \geq 2$ halmazt.

Ha $z = a + bi$, akkor

$$\begin{aligned} z + i &= a + (b+1)i \\ \mathrm{Im}\,(z+i) &= b + 1 \\ 2 &\leq b + 1 \\ 1 &\leq b \end{aligned}$$



5. feladat (b)

Ábrázoljuk a komplex számsíkon a $|2z+3|>4$ halmazt.

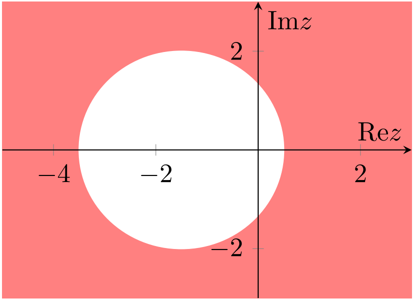
5. feladat (b)

Ábrázoljuk a komplex számsíkon a $|2z+3| > 4$ halmazt.

Ha $z = a + bi$, akkor

$$\begin{aligned} 2z+3 &= 2a+3+2bi \\ |2z+3| &= \sqrt{(2a+3)^2+(2b)^2} \\ 4 &< \sqrt{(2a+3)^2+(2b)^2} \\ 16 &< (2a+3)^2+(2b)^2 \\ 4 &< \left(a+\tfrac{3}{2}\right)^2+b^2 \end{aligned}$$

Ami a $(-\frac{3}{2}, 0)$ középpontú, 2 sugarú kör külseje.



Úgyis tekinthettük volna, hogy a feladat ekvivalens a $\left|z-(-\frac{3}{2})\right| > 2$ egyenlőtlenséggel, ami azt fejezi ki, hogy a z komplex szám a $-\frac{3}{2}$-től nagyobb, mint 2 távolságra van.

Házi feladatok

Legyen $z_1 = 3 + 2i$ és $z_2 = 7 - i$. Mennyi $\dfrac{z_1 - \overline{z_2}}{z_2}$?

Keressük meg a $z^2 + 4z + 13$ polinom gyökeit a komplex számok körében.

Számoljuk ki a $\sqrt{3} - i$ komplex szám tizenegyedik hatványát (az eredményt algebrai alakban adjuk meg).

Házi feladatok végeredménye

$$-\frac{29}{50}+\frac{3}{50}i=-0{,}58+0{,}06i$$

$$-2-\sqrt{3}i,-2+\sqrt{3}i$$

$$2^{11}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\right)=1024\sqrt{3}+1024i$$