7. gyakorlat

Sajátértékek és sajátvektorok

Horváth Márton

BME, Matematika Intézet,
Algebra és Geometria Tanszék

2025. március 27.

1. feladat

A $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix melyik sajátértékéhez tartozik a $(3, 0, -2)$ sajátvektor?

1. feladat

A $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix melyik sajátértékéhez tartozik a $(3, 0, -2)$ sajátvektor?

Az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{v}$ sajátvektorára: $\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v}$, ahol λ a sajátérték.
Számoljuk ki a mátrix és a vektor szorzatát:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix},$$

ami az eredeti vektor (-3)-szorosa, tehát ez a vektor a -3 sajátértékhez tartozó sajátvektor.

2. feladat (a)

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

2. feladat (a)

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_2) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda) - 6\cdot 3 = \lambda^2 - 7\lambda - 8,$$

melynek a gyökei $\lambda_1 = 8$ és $\lambda_2 = -1$. Ezek a sajátértékek.
Egy λ sajátértékhez a sajátérvektort az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_2$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg.
Ez a $\lambda_1 = 8$ esetén a következő:

$$\left[\begin{array}{rr|r} -3 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2-3s_1}{\sim} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát az x_2 a szabad paraméter, és $x_1 = 2x_2$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2x \\ x \end{bmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}.$$

2. feladat (a) – folytatás

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

A $\lambda_2 = -1$ esetben hasonlóan számolhatunk:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/6}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2-3s_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát az x_2 a szabad paraméter, és $x_1 = -x_2$. Így a sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -x \\ x \end{bmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}.$$

2. feladat (b)

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

2. feladat (b)

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -5 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(1-\lambda)(-3-\lambda) + 4 + 10 + 10(1-\lambda) + 2(-3-\lambda) - 2(4-\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 11\lambda - 12 + 14 + 10 - 10\lambda - 6 - 2\lambda - 8 + 2\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

Ennek a racionális gyökei a -2 osztói közül kerülnek ki, így próbálgatással azt találjuk, hogy $\lambda_1 = 1$ gyök, melyet így kiemelhetünk:

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2)$$

A kapott másodfokú polinomnak a gyökei: $\lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 2$.
Tehát a mátrix sajátértékei: $1, -1, 2$.

2. feladat (b) első sajátérték

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

$\lambda_1 = 1$ sajátértékhez sajátvektor:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right] \underset{s_3-2s_1}{\overset{s_2-3s_1}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2/2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3-2s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát x_3 a szabad paraméter, és $x_1 = x_3$ és $x_2 = x_3$.
Így a $\lambda_1 = 1$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\}$$

2. feladat (b) második sajátérték

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Hasonlóan $\lambda_2 = -1$ esetén:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{s_3-2s_1}{\overset{s_2-5s_1}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2/12}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{s_3-6s_2}{\overset{s_1+2s_2}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát $x_2 = 0$, és x_3 a szabad paraméter, és $x_1 = x_3$.
Így a $\lambda_2 = -1$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}$$

2. feladat (b) harmadik sajátérték

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

Végül $\lambda_3 = 2$ esetén:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3 - s_1}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2 - 2s_1}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{s_2/(-3)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 + s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát $x_3 = 0$ és x_2 a szabad paraméter, és $x_1 = -x_2$.
Így a $\lambda_3 = 2$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}$$

3. feladat

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit, és az egyik sajátértékhez adjunk meg egy sajátvektort.

3. feladat

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit, és az egyik sajátértékhez adjunk meg egy sajátvektort.

A sajátértékekhez az alábbi determinánst az utolsó oszlop szerinti kifejtéssel számoljuk:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0\big| \cdot \big| - 0\big| \cdot \big| + (4-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (4-\lambda)\left((-\lambda)(2-\lambda) - (-2)\right) = (4-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right)$$

Így $\lambda_1 = 4$ sajátérték. A másik két sajátérték a $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ polinom gyökei:

$$\lambda_{2,3} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 2}}{2} = \frac{+2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Tehát a sajátértékek: $4, 1+i, 1-i$.

3. feladat – folytatás

$\lambda = 4$-hez sajátvektor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2+4s_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2/10}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_3-s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1-2s_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tehát x_3 szabad paraméter, és $x_1 = x_2 = 0$.
Így a $\lambda = 4$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix} \middle| \, x \neq 0 \right\}$$

A $(0, 0, 1)$ egy sajátvektor.

4. feladat

Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ a & 4 \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$.

Határozzuk meg az ehhez tartozó sajátértéket és az a paraméter értékét.

4. feladat

Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ a & 4 \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora $\mathbf{v}_1 = (1,2)$.

Határozzuk meg az ehhez tartozó sajátértéket és az a paraméter értékét.

Ha λ_1 a $\mathbf{v}_1$ sajátvektorhoz tartozó sajátérték, akkor $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$, azaz

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ a & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ a+8 \end{bmatrix},$$

amiből $\lambda_1 = 3$, és ekkor $a + 8 = 3 \cdot 2$, amiből $a = -2$.

Innen az előző feladatokhoz hasonlóan kiszámolhatjuk az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit:

$$\det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)(4-\lambda) - (-2)\cdot(-2) = \lambda^2 - 11\lambda + 24,$$

melynek a másik gyöke: $\lambda_2 = 8$. Ehhez sajátvektor:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1/(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2+2s_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Így a sajátvektorok halmaza: $\left\{ \begin{bmatrix} -2x \\ x \end{bmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}$.

5. feladat

Írjuk fel annak a térbeli transzformációnak a mátrixát, mely az x tengely körül $120°$-kal forgat, majd a z tengely körül $90°$-kal forgat. A kompozíció milyen tengely körüli forgatás?

5. feladat

Írjuk fel annak a térbeli transzformációnak a mátrixát, mely az x tengely körül $120°$-kal forgat, majd a z tengely körül $90°$-kal forgat. A kompozíció milyen tengely körüli forgatás?

Az x tengely körüli $120°$-os forgatás mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(120°) & -\sin(120°) \\ 0 & \sin(120°) & \cos(120°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A z tengely körüli $90°$-os forgatás mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \cos(90°) & -\sin(90°) & 0 \\ \sin(90°) & \cos(90°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A két forgatás kompozíciójához tartozó mátrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

A transzformáció tengelye fix, így az iránya az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektor.

5. feladat – folytatás

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2\left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)+0+\frac{3}{4}-0-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)-0=$$

$$=-\lambda^3-\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{2}\lambda+1=(\lambda-1)\left(-\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda-1\right)$$

Tehát $\lambda = 1$ valóban sajátérték, míg a másik kettő nem valós.

Az 1-hez tartozó sajátvektor:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right] \overset{s_2+s_1}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right] \overset{s_2\cdot(-2)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right] \overset{s_3-\frac{\sqrt{3}}{2}s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_1+s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & 0 \end{array}\right]$$

x_3 szabad paraméter, $x_1 = x_2 = \sqrt{3}x_3$, így a sajátvektorok: $\left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{3}x \\ \sqrt{3}x \\ x \end{bmatrix} \,\middle|\, x \neq 0 \right\}$,
így a tengely a $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1\right)$ vektor egyenese

Bónuszfeladat

A $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix nem valós sajátértékeihez számítsuk ki a sajátvektorokat.

Házi feladat

Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat.

Házi feladat megoldása

A karakterisztikus egyenlet: $-\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda$, melynek gyökei $0, 2, -1$ a sajátértékek.

0-hoz tartozó sajátvektorok: $\left\{ \begin{bmatrix} -2x \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}$,

2-höz tartozó sajátvektorok: $\left\{ \begin{bmatrix} -2x \\ x \\ 2x \end{bmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}$,

-1-hez tartozó sajátvektorok: $\left\{ \begin{bmatrix} -x \\ -x \\ x \end{bmatrix} \middle| x \neq 0 \right\}$.