2. vizsga megoldásvázlata

5. (b)

6. $$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (2,1,2)\\ \overrightarrow{AC} = (1,-1,2)\end{array}\right\}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (4,-2,-3),$$

így a sík egyenlete $4x - 2y - 3z = 6$.

7. $$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ 2 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(-2-\lambda) + 4 + 2\lambda + (-2-\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2$$

A gyökök: $1, -1, -2$. Ezekhez sajátvektorok rendre: $(1,1,1)$, $(1,-1,1)$, $(2,-4,5)$.

8. $8i = 8(\cos(90°) + i\sin(90°))$, így a harmadik gyökök:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2(\cos(30°) + i\sin(30°)) = \sqrt{3} + i \\ z_2 &= 2(\cos(150°) + i\sin(150°)) = -\sqrt{3} + i \\ z_3 &= 2(\cos(270°) + i\sin(270°)) = -2i \end{aligned}$$

9. $$\begin{array}{lll} f_1(x,y) = x^2 + y^2 & f'_{1x}(x,y) = 2x & f'_{1x}(2,1) = 4 \\ & f'_{1y}(x,y) = 2y & f'_{1x}(2,1) = 2 \\ f_2(x,y) = xy & f'_{2x}(x,y) = y & f'_{2x}(2,1) = 1 \\ & f'_{2y}(x,y) = x & f'_{2x}(2,1) = 2 \\ f_3(x,y) = e^{xy} & f'_{3x}(x,y) = e^{xy}y & f'_{3x}(2,1) = e^2 \\ & f'_{3y}(x,y) = e^{xy}x & f'_{3x}(2,1) = 2e^2 \end{array}$$

Jacobi-mátrix:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \\ e^2 & 2e^2 \end{bmatrix}$$

10. $$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 3x^2 + 2xy - y + 8 \\ f'_y(x,y) &= x^2 - x - 6 \end{aligned}$$

A második egyenletből: $x_1 = -2, x_2 = 3$. Ezeket az elsőbe helyettesítve: $y_1 = 4$ és $y_2 = -7$. Stacionárius pontok: $(-2,4)$ és $(3,-7)$. Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 6x + 2y & 2x - 1 \\ 2x - 1 & 0 \end{vmatrix} = -(2x-1)^2 \le 0.$$

Mindkét stacionárius pont nyeregpont, nincs lokális szélsőérték.

11. A sor pozitív tagú, hányados kritériummal:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)}{(n+1)!}}{\frac{3^n\cdot n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{3^n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 0 < 1,$$

így a sor konvergens. Mivel pozitív tagú, így abszolút konvergens is.