4. vizsga megoldásvázlata

5. (c)

6.

$$\int_3^\infty \frac{3}{\sqrt{(3+2x)^3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_3^b 3(3+2x)^{-3/2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}\cdot\frac{(3+2x)^{-1/2}}{-1/2}\right]_3^b = 1$$

7.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

8. $z^3 - z^2 + z = z(z^2 - z + 1)$, aminek gyöke $z_1 = 0$, míg a másodfokúnak:

$$z_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

9.

$$f'_x(x,y) = y\cos(\pi x) - xy\sin(\pi x)\pi \qquad f'_x(3,2) = -2$$
$$f'_y(x,y) = x\cos(\pi x) \qquad f'_y(3,2) = -3$$

$$z = -2(x-3) - 3(y-2) - 6 \iff z = -2x - 3y + 6$$

10.

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 3y \qquad \Rightarrow \quad y = x^2$$
$$f'_y(x,y) = -3x + 3y^2 \qquad \Rightarrow \quad x = y^2$$

Tehát $x = y^2 = (x^2)^2 = x^4$, azaz $0 = x(x^3-1)$, így $x = 0$ vagy $x = 1$, azaz a stacionárius pontok: $(0,0)$ vagy $(1,1)$. A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9,$$

mely a $(0,0)$ pontban negatív, így ez nyeregpont (nem lokális szélsőérték), míg az $(1,1)$ pontban pozitív, így ez lokális szélsőérték, és pedig lokális minimum ($f''_{xx}(1,1) = 6 > 0$), értéke: $f(1,1) = 2$.

11. Ez egy Leibniz-sor (alternáló, tagok nullához tartanak és abszolút értékben monoton csökkennek), így konvergens.
Az abszolút konvergenciához a

$$\sum_{n=1}^\infty \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{3n}}\right| = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{3n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{1/2}}$$

sor divergens ($1/2 \not> 1$), így nem abszolút konvergens.
Tehát feltételesen konvergens a sor.