1. Reguláris felület definíciója és megadási módjai

A tér egy $S \subset \mathbb{R}^3$ részhalmazát *reguláris felületnek* nevezzük, ha minden $p \in S$ pontjának van olyan $p \in V \subset \mathbb{R}^3$ nyílt környezete, $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz és $\varphi\colon U \to V \cap S$ differenciálható homeomorfizmus, mely immerzió (azaz minden $q \in U$-ra a $\mathrm{d}\varphi_q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ derivált leképezés injektív).

Ekkor a φ leképezést *paraméterezésnek*, a $V \cap S$ halmazt *koordinátakörnyezetnek* mondjuk.

A görbékkel ellentétben itt csak az $S \subset \mathbb{R}^3$ részhalmaz „számít" (amihez megköveteljük a φ paraméterezés létezését), azaz nem különböztetjük meg a különböző módon paraméterezett felületeket.

Nem követeljük meg, hogy a felület összefüggő legyen, azt viszont igen, hogy a felület ne „messe" önmagát.

Egy $S \subset \mathbb{R}^3$ reguláris felület $\varphi\colon U \to S$ paraméterezéshez tartozó *u-paramétervonalának* nevezzük rögzített u_0-ra a $v \mapsto \varphi(u_0, v)$ görbét (mely az S felületen fut). Hasonlóan definiáljuk a v-paramétervonalakat.

Meggondolható, hogy φ pontosan akkor immerzió, ha a felület bármely pontján áthaladó két paramétervonal érintői lineárisan függetlenek.

Egyszerűbb esetben a felületet megadhatjuk egyetlen φ paraméterezéssel, ezt nevezzük Gauss-féle megadásnak.

1. állítás (Euler–Monge-féle vagy explicit megadás). *Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, és $g\colon U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény rajta. Ekkor az*

$$S = \operatorname{graf}_g = \{(u, v, g(u, v)) \mid (u, v) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$$

függvénygrafikon egy reguláris felület.

Bizonyításvázlat. Paraméterezhetünk a $\varphi(u, v) = (u, v, g(u, v))$ függvénnyel, amiről meggondolható, hogy teljesíti a követelményeket. □

2. állítás (implicit megadás). *Legyen $V \subseteq \mathbb{R}^3$ nyílt halmaz, és $f\colon V \to \mathbb{R}$ egy differenciálható függvény rajta. Tegyük fel, hogy az a valós szám reguláris értéke az f függvénynek (azaz, ha $f(x, y, z) = a$, akkor az (x, y, z) pontban nem tűnik el az f összes parciális deriváltja). Ekkor az*

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in V \mid f(x, y, z) = a\} \subset \mathbb{R}^3$$

reguláris felület.

Bizonyításvázlat. A $p = (x_0, y_0, z_0)$ pont környezetében a következő módon paraméterezhetünk. Mivel az a reguláris érték, így nem tűnik el az összes parciális derivált, feltehető, hogy $f_z(p) \neq 0$ a p egy U környezetében. Definiáljuk az $F\colon U \to \mathbb{R}^3$ függvényt az $F(x, y, z) = (x, y, f(x, y, z))$ formulával. Ekkor az F függvény Jacobi-determinánsa nem nulla, így az inverz függvény tétel szerint létezik az $F^{-1}\colon W \to U$ differenciálható inverze. Ez a függvény $F^{-1}(x, y, z) = (x, y, g(x, y, z))$ alakú valamilyen $g\colon W \to \mathbb{R}$ differenciálható függvénnyel. Legyen $h(x, y) = g(x, y, a)$. Ekkor a felület a p egy környezetében a h differenciálható függvény grafikonja, és így az 1. állítás szerint reguláris felület. □

A következő állítás mutatja, hogy lokálisan minden felület paraméterezhető expliciten.

3. állítás. *Az $S \subset \mathbb{R}^3$ reguláris felület bármely $p \in S$ rögzített pontjának van olyan $p \in V \subset S$ környezete a felületen, hogy V egy $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$ vagy $x = h(y, z)$ függvény grafikonja.*

Bizonyításvázlat. Jelölje $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ a p környezetében a paraméterezést. Definíció szerint φ immerzió, azaz a $\mathrm{d}\varphi_p$ rangja 2. Emiatt van két lineárian független sora, feltehetjük, hogy az első kettő. Tekintsük a $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \pi(x, y, z) = (x, y)$ projekciót és az $F = \pi \circ \varphi$ leképezést. A feltevésünk szerint F Jacobi-mátrixának rangja 2, így az inverz függvény tétele szerint a $\pi(p)$ egy környezetében létezik az F függvény differenciálható inverze. Ekkor p környezetében a felület a $\varphi_3 \circ F^{-1}$ differenciálható függvény grafikonja. □

A felületen adott függvény differenciálhatóságának definiálásához szükségünk van a következő állításra.

4. állítás. *Legyen $S \subset \mathbb{R}^3$ reguláris felület, melynek a $\varphi_1 \colon U_1 \to S, \varphi_2 \colon U_2 \to S$ paraméterezésére a $W = \varphi(U_1) \cap \varphi(U_2)$ halmaz nem üres. Ekkor a*

$$\eta = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 \colon \varphi_1^{-1}(W) \to \varphi_2^{-1}(W)$$

koordináta-transzformáció diffeomorfizmus.

Egy $S \subset \mathbb{R}^3$ reguláris felület $V \subseteq S$ részhalmazán értelmezett $F \colon V \to \mathbb{R}$ függvényt *differenciálhatónak* mondjuk, ha minden $p \in V$ ponthoz van olyan $\varphi \colon U \to S$ paraméterezés ($p \in \varphi(U)$), hogy az $F \circ \varphi \colon U \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható $\varphi^{-1}(p)$-ben. A 4. állítás mutatja, hogy ha egy paraméterezésre differenciálható a leképezés, akkor a többire is.

Hasonlóan definiálhatjuk az S_1, S_2 reguláris felületek közötti $F \colon S_1 \to S_2$ leképezés differenciálhatóságát is. Ennek segítségével két reguláris felületet *diffeomorfnak* nevezünk, ha van köztük oda-vissza differenciálható bijektív leképezés.

2. Érintősík

A reguláris felület definíciójánál kikötöttük, hogy a φ paraméterezés immerzió legyen. Ez garantálja, hogy a felület minden pontjában definiálható egy egyértelmű érintősík.

Egy S reguláris felület egy $p \in S$ pontján át tekintsünk egy olyan $\alpha \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ differenciálható görbét, melyre $\alpha(0) = p$. Ekkor az $\alpha'(0) \in \mathbb{R}^3$ vektort p-beli *érintővektornak* nevezzük ($\alpha'(0) = \mathbf{0}$-t is megengedve).

5. állítás. *Ha egy S reguláris felületet a $\varphi \colon U \to S$ paraméterezéssel paraméterezhetünk ($U \subset \mathbb{R}^2$), akkor $q \in U$ pontra a $\mathrm{d}\varphi_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$ képtér pontosan a $\varphi(q)$-beli érintővektorok halmaza ($\mathrm{d}\varphi_q$ jelöli a φ leképezés q-beli Jacobi-mátrixa által meghatározott transzformációt).*

Bizonyításvázlat. Tegyük fel, hogy adott az $\alpha'(0)$ érintővektor, ahol $\alpha \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \varphi(U) \subseteq S$ és $\alpha(0) = \varphi(q)$. Tekintsük a $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ görbét. Ekkor $\mathrm{d}\varphi_q(\beta'(0)) = \alpha'(0)$. Fordítva, ha adott a $\mathrm{d}\varphi_q(v)$ vektor ($v \in \mathbb{R}^2$), akkor az $\alpha(t) = \varphi(q + tv)$ görbére $\alpha'(0) = \mathrm{d}\varphi_q(v)$. $\square$

Az 5. állítás mutatja, hogy a $\mathrm{d}\varphi_q(\mathbb{R}^2)$ független a φ paraméterezés választásától. Így azt is látjuk, hogy egy $p \in S$ pontbeli érintővektorok egy síkon fekszenek, ezt nevezzük a p-beli *érintősíknak*, melyre a T_pS jelölést használjuk. Könnyen meggondolható, hogy egy adott $\varphi \colon U \to S$ paraméterezésnél minden $q \in U$ pontra a $T_{\varphi(q)}S$ érintősíkban a $\varphi_u(q), \varphi_v(q)$ érintővektorok bázist alkotnak.

6. állítás. *Tegyük fel, hogy az $f \colon V \to \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek ($V \subseteq \mathbb{R}^3$ nyílt) az $a \in \mathbb{R}$ reguláris értéke. Ekkor az $f(x, y, z) = a$ által definiált reguláris felület egy (x_0, y_0, z_0) pontjában az érintősík egyenlete*

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Bizonyításvázlat. Mivel egy $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ felületi görbe mentén az f függvény azonosan 0, deriválással azt kapjuk, hogy az $(f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0))$ gradiens vektor merőleges az összes (x_0, y_0, z_0)-beli érintővektorra, így ez az érintősík normálvektora. $\square$

Az érintősíkok segítségével definiálhatjuk két metsző reguláris felület szögét a metszéspontban az ottani érintősíkok szögeként (melyet a normálvektorok szöge segítségével számolhatunk).

Reguláris felületek közötti differenciálható leképezés az érintősíkok között is indukál egy leképezést:

7. állítás. *Legyen $F\colon S_1 \to S_2$ két reguláris felület közötti differenciálható leképezés. Ekkor egy tetszőleges $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_1$ görbéhez (melyre $\alpha(0) = p$) tekintsük az F általi képét, a $\beta = F \circ \alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_2$ görbét. Ekkor a*

$$\mathrm{d}F_p\colon T_pS_1 \to T_{F(p)}S_2 \qquad \alpha'(0) \mapsto \beta'(0)$$

leképezés jól definiált és lineáris.

A 7. állításban szereplő $\mathrm{d}F_p$ leképezést nevezzük az F *differenciáljának*.

Ha $F\colon S_1 \to S_2$ olyan leképezés, hogy minden $p \in S_1$-hez létezik olyan $p \in V \subset S_1$ környezet, hogy $F|_V$ diffeomorfizmus V és $F(V)$ között, akkor az F leképezést *lokális diffeomorfizmusnak* nevezzük.

8. állítás. *Ha $F\colon S_1 \to S_2$ reguláris felületek közötti olyan leképezés, hogy minden $p \in S_1$-re $\mathrm{d}F_p$ izomorfizmus, akkor F lokális diffeomorfizmus.*

3. Az első alapforma

Az $S \subset \mathbb{R}^3$ reguláris felület T_pS érintősíkján az $\mathbb{R}^3$ skaláris szorzása ad egy $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ skaláris szorzást. Ezzel megadhatunk egy $I_p(w) = \langle w, w \rangle_p$ kvadratikus formát T_pS-en, melyet a felület *első alapformájának* nevezünk. Lineáris algebrából ismert tény, hogy ez a kvadratikus forma meghatározza a skaláris szorzást az érintősíkon. Ennek segítségével tudunk ,,mérni" a felületen: kiszámolhatjuk görbék hosszát, szögét, és felszínt is számolhatunk anélkül, hogy használnánk a bennfoglaló $\mathbb{R}^3$ struktúráját.

Tegyük fel, hogy az S reguláris felületen adott egy $w \in T_pS$ érintővektor. Ehhez definíció szerint van egy olyan $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ görbe, melyre $\alpha(0) = p$ és $\alpha'(0) = w$. Válasszunk a p körül egy $\varphi\colon U \to S$ paraméterezést, melyről tegyük fel, hogy $\mathrm{im}(\alpha) \subset \varphi(U)$ (szükség esetén csökkenteni kell az ε-t). Ekkor az α görbét felírhatjuk $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ alakban. Az $u_0 = u(0)$ és a $v_0 = v(0)$ jelölésekkel

$$\begin{aligned}
I_p(w) = {}& I_p(\alpha'(0)) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p = \\
&= \langle \varphi_u(u_0, v_0)u'(0) + \varphi_v(u_0, v_0)v'(0), \varphi_u(u_0, v_0)u'(0) + \varphi_v(u_0, v_0)v'(0) \rangle_p = \\
&= \langle \varphi_u(u_0, v_0), \varphi_u(u_0, v_0) \rangle_p u'(0)^2 + 2\langle \varphi_u(u_0, v_0), \varphi_v(u_0, v_0) \rangle_p u'(0)v'(0) + \langle \varphi_v(u_0, v_0), \varphi_v(u_0, v_0) \rangle_p v'(0)^2.
\end{aligned}$$

Bevezetve az

$$\begin{aligned}
E(u, v) &= \langle \varphi_u(u, v), \varphi_u(u, v) \rangle_{\varphi(u,v)} \\
F(u, v) &= \langle \varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle_{\varphi(u,v)} \\
G(u, v) &= \langle \varphi_v(u, v), \varphi_v(u, v) \rangle_{\varphi(u,v)}
\end{aligned}$$

jelöléseket

$$I_p(w) = E(u_0, v_0)(u'(0))^2 + 2F(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + G(u_0, v_0)(v'(0))^2.$$

Az $E, F, G\colon U \to \mathbb{R}$ függvényeket nevezzük a felület *első alapmennyiségeinek*.

Könnyen kapjuk, hogy

$$E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2 = \|\varphi_u(u, v) \times \varphi_v(u, v)\|^2 > 0,$$

mert lineárisan függetlenek.

Egy $c\colon I \to S$ görbe ívhossza:

$$L(c) = \int_I \|c'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_I \sqrt{I_{c(t)}(c'(t))}\,\mathrm{d}t.$$

Ha a görbe $c(t) = \varphi(u(t), v(t))$ alakú, akkor

$$L(c) = \int_I \sqrt{E(u(t), v(t))(u'(t))^2 + 2F(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + G(u(t), v(t))(v'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Két $w_1, w_2 \in T_pS$ érintővektor θ szögét a skaláris szorzásból számolhatjuk:

$$\cos\theta = \frac{\langle w_1, w_2\rangle_p}{\|w_1\|_p\|w_2\|_p}.$$

Például a φ paraméterezésnél a $\varphi(u,v)$ pontban a paramétervonalak $\arccos\left(\frac{F(u,v)}{\sqrt{E(u,v)G(u,v)}}\right)$ szögben metszik egymást.

4. Felszín

Ha adott egy $S \subset \mathbb{R}^3$ reguláris felület $\varphi\colon U \to S$ paraméterezése, akkor egy $T \subset U$ nyílt halmaz $\varphi(T)$ képének *felszínét* az

$$A(\varphi(T)) = \iint\limits_T \|\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)\| \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint\limits_T \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

formulával definiáljuk.

9. állítás. *A felszín nem függ a φ paraméterezés választásától.*

Bizonyításvázlat. Tegyük fel, hogy van egy másik $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{U} \to S$ paraméterezésünk, ahol a $\widetilde{T} \subset \widetilde{U}$ halmaznak ugyanaz a képe a felületen: $\varphi(T) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{T})$. Vizsgáljuk meg, hogy ekkor mit kapunk a felszínre. A $\widetilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ koordináta-transzformációt $\eta = (\eta^1, \eta^2)$-vel jelölve, a $\varphi(u,v) = \widetilde{\varphi} \circ \eta(u,v)$ összefüggést felhasználva kiszámolhatjuk a parciális deriváltákat az $\tilde{u} = \eta^1(u,v)$ és a $\tilde{v} = \eta^2(u,v)$ helyen vett parciális deriváltak segítségével:

$$\begin{aligned}
\varphi_u(u,v) &= \widetilde{\varphi}_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v})\eta^1_u(u,v) + \widetilde{\varphi}_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v})\eta^2_u(u,v),\\
\varphi_v(u,v) &= \widetilde{\varphi}_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v})\eta^1_v(u,v) + \widetilde{\varphi}_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v})\eta^2_v(u,v).
\end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v) &= \big(\widetilde{\varphi}_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v})\eta^1_u(u,v) + \widetilde{\varphi}_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v})\eta^2_u(u,v)\big) \times \big(\widetilde{\varphi}_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v})\eta^1_v(u,v) + \widetilde{\varphi}_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v})\eta^2_v(u,v)\big) =\\
&= (\widetilde{\varphi}_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) \times \widetilde{\varphi}_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}))\,(\eta^1_u(u,v)\eta^2_v(u,v)) + (\varphi_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}) \times \varphi_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}))\,(\eta^2_u(u,v)\eta^1_v(u,v)) =\\
&= (\widetilde{\varphi}_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) \times \widetilde{\varphi}_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}))\,(\eta^1_u(u,v)\eta^2_v(u,v) - \eta^2_u(u,v)\eta^1_v(u,v)) =\\
&= (\widetilde{\varphi}_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) \times \widetilde{\varphi}_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v}))\det \mathrm{d}\eta_{(u,v)}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Így a $\varphi(T)$ felszíne az integráltranszformációs tételt használva:

$$\begin{aligned}
A(\varphi(T)) &= \iint\limits_T \|\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint\limits_T \|\widetilde{\varphi}_{\tilde{u}}(\eta(u,v)) \times \widetilde{\varphi}_{\tilde{v}}(\eta(u,v))\| \cdot |\det \mathrm{d}\eta_{(u,v)}|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =\\
&= \iint\limits_{\widetilde{T}} \|\widetilde{\varphi}_{\tilde{u}}(\tilde{u},\tilde{v}) \times \widetilde{\varphi}_{\tilde{v}}(\tilde{u},\tilde{v})\|\,\mathrm{d}\tilde{u}\,\mathrm{d}\tilde{v} = A(\widetilde{\varphi}(\widetilde{T})),
\end{aligned}$$

ami mutatja, hogy jól definiált a felszín, nem függ a választott paraméterezéstől. □

5. Irányíthatóság

Egy reguláris felületet *irányíthatónak* nevezünk, ha megadhatók hozzá olyan paraméterezések, hogy ha egy pont két koordinátakörnyezettel is le van fedve, akkor a koordináta-transzformáció Jacobi-determinánsa pozitív. Ha nem adható meg, akkor *nem irányíthatónak* nevezzük a felületet (ilyen például a Möbius-szalag).

Egy reguláris felület egy $V \subseteq S$ részhalmazán *egységnormális mezőn* olyan $\mathbf{N}\colon V \to \mathbb{R}^3$ leképezést értünk, melyre minden $p \in V$ pontra az $\mathbf{N}(p)$ az S normális egységvektora (azaz merőleges T_pS-re és egységhosszú).

10. állítás. *Egy reguláris felület pontosan akkor irányítható, ha létezik rajta differenciálható egységnormális mező.*

Bizonyításvázlat. Ha irányítható a felület, akkor az $\mathbf{N}(\varphi(u,v)) = \frac{\varphi_u(u,v)\times\varphi_v(u,v)}{\|\varphi_u(u,v)\times\varphi_v(u,v)\|}$ vektormező jól definiált és megfelelő (normális, egységhosszú és differenciálható).

Ha létezik az $\mathbf{N}$ egységnormális mező, akkor rögzített φ paraméterezésre az

$$f(u,v) = \left\langle \mathbf{N}(\varphi(u,v)), \frac{\varphi_u(u,v)\times\varphi_v(u,v)}{\|\varphi_u(u,v)\times\varphi_v(u,v)\|} \right\rangle$$

függvény folytonos, és 1 abszolút értékű, azaz vagy azonosan 1, vagy azonosan -1. Utóbbi esetben fordítsuk meg a φ paraméterezés irányítását (például az $u \mapsto -u$ transzformációval). Az így kapott paraméterezéseknél az áttérés Jacobi-determinánsa pozitív lesz az (1) egyenlet szerint, azaz irányítható a felület. $\square$

11. állítás. *Tegyük fel, hogy az $f\colon V \to \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek ($V \subseteq \mathbb{R}^3$ nyílt) az $a \in \mathbb{R}$ reguláris értéke. Ekkor az $f(x,y,z) = a$ által definiált reguláris felület irányítható.*

Bizonyításvázlat. A 6. állítás bizonyításánál láttuk, hogy az (f_x, f_y, f_z) gradiens vektor nemnulla normálvektor a felületen, amit lenormálva kapunk egy differenciálható egységnormális mezőt. Ekkor a 10. állítás szerint irányítható a felület. $\square$

Végül megemlítünk két tételt az irányíthatósággal kapcsolatban bizonyítás nélkül.

1. tétel. *Ha S irányítható reguláris felület, akkor megadható implicit módon.*

2. tétel. *Minden kompakt reguláris felület irányítható.*

6. Felületek belső geometriája

Izometriának általában távolságtartó leképezéseket szoktunk nevezni. Reguláris felületek esetében olyan $F\colon S_1 \to S_2$ diffeomorfizmust nevezünk *izometriának*, melynek derivált leképezése megőrzi az érintősík skaláris szorzását, azaz minden $p \in S_1$ pontra és $w_1, w_2 \in T_pS_1$ érintővektorokra fennáll, hogy $\langle w_1, w_2\rangle_p = \langle \mathrm{d}F_p(w_1), \mathrm{d}F_p(w_2)\rangle_{F(p)}$. Ekkor a reguláris felületeket izometrikusnak nevezzük. A skaláris szorzás helyett elegendő lenne hasonlót feltenni az első alapformáról, hiszen már az is meghatározza a skaláris szorzást.

A *lokális izometria* definiálásánál csak azt követeljük meg, hogy minden $p \in S_1$ pontnak legyen olyan $V \subset S_1$ környezete, amihez van olyan $F\colon V \to S_2$ leképezés, mely izometria V és $F(V)$ között. Ekkor az S_1, S_2 reguláris felületeket lokálisan izometrikusnak nevezzük.

12. állítás. *Ha az S_1, S_2 reguláris felületek $\varphi_1\colon U \to S_1$, $\varphi_2\colon U \to S_2$ paraméterezéseire az első alapmennyiségek megegyeznek (azaz minden $(u,v) \in U$-ra $E_1(u,v) = E_2(u,v)$, $F_1(u,v) = F_2(u,v)$, $G_1(u,v) = G_2(u,v)$ teljesül), akkor a $\Phi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}\colon \varphi_1(U) \to \varphi_2(U)$ leképezés lokális izometria.*

Bizonyításvázlat. Az első alapformát (és így a skaláris szorzást) az első alapmennyiségek meghatározzák. $\square$

Egy S reguláris felületen belül is mérhetünk távolságot, a $p, q \in S$ pontok *belső távolságát* az őket összekötő görbék ívhosszának infimumaként definiáljuk.

Két reguláris felület közötti $F\colon S_1 \to S_2$ diffeomorf leképezést *konformnak* nevezünk, ha a deriváltja a skaláris szorzást egy (ponttól függő) skalárszorosba visz, azaz van olyan $\lambda\colon S_1 \to \mathbb{R}$ függvény, hogy minden $p \in S_1$ pontra és $w_1, w_2 \in T_pS_1$ érintővektorra

$$\langle \mathrm{d}F_p(w_1), \mathrm{d}F_p(w_2)\rangle_{F(p)} = \lambda^2(p)\langle w_1, w_2\rangle_p.$$

Ekkor a felületeket *konformnak* mondjuk.

A lokális konformitást hasonlóan definiálhatjuk. Ez ekvivalens a szögtartással.

3. tétel. *Bármely két reguláris felület lokálisan konform.*

7. Weingarten-leképezés

Ebben a fejezetben feltesszük, hogy az S reguláris felületünk irányítható, azaz van rajta egy differenciálható $\mathbf{N}\colon S \to \mathbb{R}^3$ egységnormális mező. Mivel az $\mathbf{N}(p)$ egységnyi hosszú ($p \in S$), így valójában $\mathbf{N}$ az

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

gömbfelületre képez. Ezt az $\mathcal{N}\colon S \to \mathbb{S}^2$ leképezést *Gauss-leképezésnek* nevezzük.

Mivel az $\mathbb{S}^2$ egy reguláris felület, így tekinthetjük az $\mathcal{N}$ derivált leképezését a p pontban: $\mathrm{d}\mathcal{N}_p\colon T_pS \to T_{\mathcal{N}(p)}\mathbb{S}^2$. Mivel T_pS és $T_{\mathcal{N}(p)}\mathbb{S}^2$ párhuzamosak, így azonosíthatjuk őket, és ezzel $\mathrm{d}\mathcal{N}_p\colon T_pS \to T_pS$. Ennek a leképezésnek a $-\mathrm{d}\mathcal{N}_p$ ellentettjét *Weingarten-leképezésnek* vagy *alakoperátornak* nevezzük.

13. állítás. *A Weingarten-leképezés önadjungált lineáris leképezés.*

Bizonyításvázlat. A 7. állítás adja a linearitást, és így az önadjungáltságot elegendő egy bázisra ellenőrizni. Ha a $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ bázisban ellenőrizzük, akkor az $\mathbf{N}(u, v) = \mathcal{N}(\varphi(u, v))$ jelöléssel $\mathrm{d}\mathcal{N}_p(\varphi_u) = \mathbf{N}_u$ és $\mathrm{d}\mathcal{N}_p(\varphi_v) = \mathbf{N}_v$. Tehát az $\langle \mathbf{N}_u, \varphi_v\rangle = \langle \mathbf{N}_v, \varphi_u\rangle$ egyenlőséget kell belátni, ami az $\langle \mathbf{N}, \varphi_u\rangle = \langle \mathbf{N}, \varphi_v\rangle = 0$ egyenlőségek u és v szerinti parciális deriválásából és a Young-tételből ($\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$) következik. $\square$

A $\langle -\mathrm{d}\mathcal{N}_p(v), v\rangle_p$ egy kvadratikus forma, ezt nevezzük a felület *második alapformájának*:

$$\begin{gathered} I\!I_p\colon T_pS \to \mathbb{R} \\ I\!I_p(v) = \langle -\mathrm{d}\mathcal{N}_p(v), v\rangle_p. \end{gathered}$$

Egy $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ felületi görbére legyen $c(0) = p$, ekkor a $k_n = \kappa(0)\langle \mathbf{n}(0), \mathcal{N}(p)\rangle$ számot a c görbe p-beli *normálgörbületének* nevezzük (ahol $\mathbf{n}(0)$, $\kappa(0)$ a főnormális vektora, illetve a görbülete a p-ben). Az $\langle \mathbf{n}(0), \mathcal{N}(p)\rangle$ skalárszorzat a kétféle normálvektor által bezárt θ szög koszinuszát adja meg (mivel egységhosszúak).

14. állítás (Meusnier). *Az S reguláris felület egy $p \in S$ pontján áthaladó, azonos p-beli érintővektorral rendelkező felületi görbéknek azonos a normálgörbülete a p pontban.*

Bizonyításvázlat. Tekintsünk egy $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ természetes paraméterezésű görbét. Ekkor az $\mathbf{N}(t) = \mathcal{N}(c(t))$ jelöléssel az $\langle \mathbf{N}(t), c'(t)\rangle = 0$ összefüggés t szerinti deriváltját felhasználva

$$k_n(c'(0)) = \langle \mathbf{N}(0), \kappa(0)\mathbf{n}(0)\rangle = \langle \mathbf{N}(0), c''(0)\rangle = \langle -\mathbf{N}'(0), c'(0)\rangle = \langle -\mathrm{d}\mathcal{N}_p(c'(0)), c'(0)\rangle = I\!I(c'(0)),$$

amiről tudjuk, hogy nem függ a c görbe választásától. $\square$

A 13. állítás szerint a Weingarten-leképezés mátrixa szimmetrikus, így a főtengelytétel szerint van olyan $\{e_1, e_2\}$ ortonormált bázis, melyre

$$-\mathrm{d}\mathcal{N}_p(e_1) = k_1 e_1,$$
$$-\mathrm{d}\mathcal{N}_p(e_2) = k_2 e_2.$$

A $k_1 \geq k_2$ egyenlőtlenséget feltéve a második alapforma maximuma k_1, minimuma k_2 a T_pS érintősík egységkörén. Ezen sajátértékekeket/szélsőértékeket *főgörbületeknek*, a hozzájuk tartozó irányokat *főirányoknak* nevezzük (melyek merőlegesek egymásra).

A főgörbületek segítségével kiszámolhatjuk a normálgörbületet tetszőleges irányban. Egy egységhosszú $v \in T_pS$ érintővektort felírhatunk $v = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta$ alakban, és ekkor az irányában a normálgörbület:

$$k_n(v) = I\!I_p(v) = \langle -\mathrm{d}\mathcal{N}_p(v), v\rangle = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

Ezt a kifejezést nevezzük *Euler-formulának.*

A $-\mathrm{d}\mathcal{N}_p$ Weingarten-leképezés $\mathcal{K} = k_1k_2$ determinánsát *Gauss-* vagy *szorzatgörbületnek*, a $\mathcal{H} = k_1 + k_2$ nyomát *Minkowski-* vagy *összeggörbületnek* nevezzük (néha ennek a felét).

Egy reguláris felület p pontját *elliptikusnak* nevezünk, ha $\det(\mathrm{d}\mathcal{N}_p)$ pozitív, míg *hiperbolikusnak*, ha negatív. Ha $\det(\mathrm{d}\mathcal{N}_p) = 0$, akkor a pont *parabolikus* (ha $\mathrm{d}\mathcal{N}_p \neq 0$), illetve planáris (ha $\mathrm{d}\mathcal{N}_p = 0$). Ha a felület egy pontjában a főgörbületek egyenlőek ($k_1 = k_2$), akkor *umbilikus* pontról beszélünk.

A felület egy rögzített $p \in S$ pontjában a *Dupin-féle indikátrix* azon $w \in T_pS$ érintővektorokból áll, melyekre $I\!I_p(w) = \pm 1$. Ha a főirányokból álló $\{e_1, e_2\}$ bázisban a w koordinátái ξ, η, akkor a $w = \rho v$ által definiált egységhosszú v vektor és az Euler-formula segítségével:

$$\pm 1 = I\!I_p(w) = \rho^2 I\!I_p(v) = k_1\xi^2 + k_2\eta^2.$$

8. Lokális számolás egy koordinátakörnyezeten

Egy S reguláris felületen rögzítsünk egy $\varphi\colon U \to S$ paraméterezést, és definiáljuk az $\mathcal{N}$ differenciálható egységnormális mezőt az $\mathcal{N} \circ \varphi = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$ formulával. Továbbá rögzítsünk egy $(u_0, v_0) \in U$ pontot, melynek képe $p = \varphi(u_0, v_0)$. Ha külön nem jelöljük, akkor a továbbiakban a függvényeket az (u_0, v_0) pontban értékeljük ki.

Tekintsünk egy $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ görbét, melyre $\alpha(0) = p$. Az ennek megfelelő $w = \alpha'(0) = \varphi_u u'(0) + \varphi_v v'(0) \in T_pS$ érintővektorra a Gauss-leképezés deriváltja az $\mathbf{N}(u, v) = \mathcal{N}(\varphi(u, v))$ jelöléssel:

$$\mathrm{d}\mathcal{N}_p(w) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{N}(u(t), v(t))\bigg|_{t=0} = \mathbf{N}_u u'(0) + \mathbf{N}_v v'(0),$$

ahol az $\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v \in T_pS$ érintővektorokat felírhatjuk a $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ bázisban:

$$\mathbf{N}_u = \mathbf{N}_u^u \varphi_u + \mathbf{N}_u^v \varphi_v \qquad \mathbf{N}_v = \mathbf{N}_v^u \varphi_u + \mathbf{N}_v^v \varphi_v$$

A második alapforma a $w = \alpha'(0)$ vektoron:

$$I\!I_p(w) = \langle -\mathrm{d}\mathcal{N}_p(w), w\rangle = -\langle \mathbf{N}_u, \varphi_u\rangle (u'(0))^2 - \langle \mathbf{N}_u, \varphi_v\rangle u'(0)v'(0) - \langle \mathbf{N}_v, \varphi_u\rangle v'(0)u'(0) - \langle \mathbf{N}_v, \varphi_v\rangle (v'(0))^2.$$

Az $\langle \mathbf{N}, \varphi_u\rangle = \langle \mathbf{N}, \varphi_v\rangle = 0$ egyenlőségek parciális deriváltjait felhasználva, bevezethetjük az

$$L = -\langle \mathbf{N}_u, \varphi_u\rangle = \langle \mathbf{N}, \varphi_{uu}\rangle$$
$$M = -\langle \mathbf{N}_u, \varphi_v\rangle = \langle \mathbf{N}, \varphi_{uv}\rangle = -\langle \mathbf{N}_v, \varphi_u\rangle$$
$$N = -\langle \mathbf{N}_v, \varphi_v\rangle = \langle \mathbf{N}, \varphi_{vv}\rangle$$

második alapmennyiségeket. Ekkor a második alapforma:

$$II_p(w) = L(u'(0))^2 + 2Mu'(0)v'(0) + N(v'(0))^2.$$

Könnyen meggondolható, hogy

$$-\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_u^u & \mathbf{N}_u^v \\ \mathbf{N}_v^u & \mathbf{N}_v^v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

amiből felírhatjuk a $-\mathrm{d}\mathcal{N}_p$ Weingarten-leképezés mátrixát a $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ bázisban:

$$-\begin{pmatrix} \mathbf{N}_u^u & \mathbf{N}_u^v \\ \mathbf{N}_v^u & \mathbf{N}_v^v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Ennek a determinánsa és nyoma adja meg a szorzat- és összeggörbületet:

$$\mathcal{K} = \mathbf{N}_u^u \mathbf{N}_v^v - \mathbf{N}_u^v \mathbf{N}_v^u = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$
$$\mathcal{H} = -(\mathbf{N}_u^u + \mathbf{N}_v^v) = \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}.$$

15. állítás. *Ha a p egy elliptikus pont, akkor létezik olyan V környezete a felületen, hogy a V minden pontja a T_pS érintősík ugyanazon oldalán van. Ha a p hiperbolikus pont, akkor p minden környezetének a T_pS érintősík mindkét oldalán van pontja.*

Bizonyításvázlat. Tegyük fel, hogy $\varphi(0,0) = p$, és a φ leképezésre alkalmazzuk a másodrendű Taylor-formulát:

$$\varphi(u,v) = \varphi(0,0) + \varphi_u(0,0)u + \varphi_v(0,0)v + \frac{1}{2}\varphi_{uu}(0,0)u^2 + \varphi_{uv}(0,0)uv + \frac{1}{2}\varphi_{vv}(0,0)v^2 + R(u,v),$$

ahol $\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{R(u,v)}{u^2+v^2} = 0$. A felület egy $\varphi(u,v)$ pontjának a T_pS érintősíktól való $d(u,v)$ előjeles távolságát az $\mathbf{N} = \mathcal{N}(p)$ normálvektor segítségével írhatjuk fel:

$$d(u,v) = \langle \varphi(u,v) - \varphi(0,0), \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2}L(0,0)u^2 + M(0,0)uv + \frac{1}{2}N(0,0)v^2 + \langle R(u,v), \mathbf{N} \rangle,$$

tehát a távolság előjelét a második alapforma határozza meg (a maradéktag elegendően közel már nem befolyásolja az előjelet), amiből könnyen kapjuk a bizonyítandó állítást. $\square$

9. Gauss és Bonnet tétele

Tekintsünk egy S irányítható reguláris felületet, és annak egy $\varphi\colon U \to S$ paraméterezését. Minden $\varphi(u,v)$ pontban ($(u,v) \in U$) az $\mathbb{R}^3$ tér egy bázisát adja a $\varphi_u(u,v)$, $\varphi_v(u,v)$, $\mathbf{N}(u,v)$ vektorhármas. Így a φ második deriváltjait fel tudjuk írni a következő alakban az $(u,v) \in U$ pontban (továbbiakban ezt nem írjuk ki):

$$\varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L\mathbf{N},$$
$$\varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + M\mathbf{N},$$
$$\varphi_{vu} = \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + M\mathbf{N},$$
$$\varphi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + N\mathbf{N}.$$

A Γ_{ij}^k együtthatókat *Christoffel-szimbólumoknak* nevezzük. A $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$ egyenlőségből következik, hogy $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$ és $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$. További számolásokkal kapjuk, hogy a Christoffel-szimbólumokat az első alapmennyiségek meghatározzák. Ebből következik, hogy a Christoffel-szimbólumokkal kifejezhető mennyiségek invariánsak az izometriákkal szemben. Ennek egy alkalmazása a következő tétel.

4. tétel (Theorema Egregium). *Felületek Gauss-görbülete izometriával szemben invariáns.*

Bizonyításvázlat. Kiszámolható a következő, *Gauss-formulának* nevezett összefüggés:

$$\left(\Gamma_{12}^2\right)_u - \left(\Gamma_{11}^2\right)_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 = -E\mathcal{K}.$$

□

További összefüggéseket adnak a *Mainardi–Codazzi-egyenletek*:

$$L_v - M_u = L\Gamma_{12}^1 + M(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - N\Gamma_{11}^2,$$
$$M_v - N_u = L\Gamma_{22}^1 + M(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - N\Gamma_{12}^2.$$

A Gauss-formulát és a Mainardi–Codazzi-egyenleteket nevezzük *kompatibilitási egyenleteknek.*

5. tétel (Bonnet). *Ha adottak az $E, F, G, L, M, N : U \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények egy $U \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmazon, melyekre $E > 0$, $G > 0$, és $EG - F^2 > 0$, továbbá ezen függvények kielégítik a kompatibilitási egyenleteket, akkor minden $q \in U$ pontnak létezik olyan $V \subset U$ környezete és $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^3$ leképezés, hogy a $\varphi(V)$ reguláris felület, melynek a φ paraméterezése, és az E, F, G az első, míg az L, M, N függvények a második alapmennyiségei. Továbbá, ha az U összefüggő, akkor φ egybevágósági transzformáció erejéig egyértelmű.*

10. Párhuzamos eltolás és geodetikusok

Az S reguláris felületen egy *vektormező* a felület minden p pontjához egy $X(p) \in T_pS$ érintővektort rendel. Egy vektormező differenciálhatóságát a paraméterezés segítségével definiálhatjuk.

Ha az S reguláris felületen adott egy X vektormező, és egy $w \in T_pS$ érintővektor, melyhez tartozó $\alpha\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ görbe ($\alpha(0) = p, \alpha'(0) = w$), legyen $w(t) = X(\alpha(t))$. Ekkor a $w'(0)$ vektor T_pS-re való vetületét az X vektormező w-re vonatkozó *kovariáns deriváltjának* nevezzük. Jelölése: $\mathrm{D}_wX(p)$.

Tekintsük a p pont környezetének egy φ paraméterezését. Legyen $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$, és

$$w(t) = a(t)\varphi_u(u(t), v(t)) + b(t)\varphi_v(u(t), v(t)).$$

Ezt deriválva

$$w'(t) = a'(t)\varphi_u(u(t), v(t)) + a(t)(\varphi_{uu}u'(t) + \varphi_{uv}v'(t)) + b'(t)\varphi_v(u(t), v(t)) + b(t)(\varphi_{vu}u'(t) + \varphi_{vv}v'(t)).$$

Ebből a kovariáns derivált

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_wX(p) = {} & (a'(0) + \Gamma_{11}^1 a(0)u'(0) + \Gamma_{12}^1 a(0)v'(0) + \Gamma_{12}^1 b(0)u'(0) + \Gamma_{22}^1 b(0)v'(0))\varphi_u + \\ & + (b'(0) + \Gamma_{11}^2 a(0)u'(0) + \Gamma_{12}^2 a(0)v'(0) + \Gamma_{12}^2 b(0)u'(0) + \Gamma_{22}^2 b(0)v'(0))\varphi_v.\end{aligned}$$

A kovariáns deriválás tehát csak a w érintő vektortól függ, az α reprezentáló görbétől nem függ. Továbbá azt is látjuk, hogy a kovariáns deriválás csak a belső geometriától függ.

Egy $c\colon I \to S$ *görbe menti vektormező* a görbe minden $c(t)$ pontjához egy $w(t) \in T_{c(t)}S$ érintővektort rendel. A görbe menti vektormezőket a fentiek szerint tudjuk kovariánsan deriválni a görbe irányában, ezt $\mathrm{D}w/\mathrm{d}t$-vel jelöljük. Egy c görbe menti w vektormező *párhuzamos*, ha a kovariáns deriváltja azonosan 0. Például egy gömb főköreinek érintővektorai.

16. állítás. *Legyen v, w két párhuzamos vektormező egy c görbe mentén. Ekkor $\langle v(t), w(t)\rangle$ állandó. Speciálisan a hosszuk és a szögük is.*

Bizonyításvázlat. Mivel párhuzamos vektormezők, így deriváltjuk merőleges az érintősíkra, így $\langle v'(t), w(t)\rangle$ és $\langle v(t), w'(t)\rangle = 0$. Ezért

$$\langle v(t), w(t)\rangle' = \langle v'(t), w(t)\rangle + \langle v(t), w'(t)\rangle = 0,$$

azaz $\langle v(t), w(t)\rangle$ valóban állandó. □

17. állítás. *Legyen c egy görbe az S reguláris felületen, és legyen $w \in T_{c(t_0)}S$. Ekkor egyértelműen létezik egy $w(t)$ c görbe menti párhuzamos vektormező, melyre $w(t_0) = w$.*

A w vektor *párhuzamos eltoltja* a c görbe mentén a t_1 pontba a fenti állítás szerinti $w(t_1)$ érintő vektor. A 16. állítás szerint a párhuzamos eltolás izomorfizmus az érintősíkok között.

Egy c görbét *geodetikusnak* nevezünk, ha a c' érintővektora mint c görbe menti vektormező párhuzamos. Például egy gömb főkörei, vagy a sík egyenesei.

Legyen w egy c görbe menti vektormező egy irányítható S reguláris felületen (melynek normálvektora $N\colon S \to \mathbb{R}^3$), továbbá tegyük fel, hogy w értéke mindenütt egységvektor, és így $w'(t) \perp w(t)$. Ekkor a

$$\mathrm{D}w/\mathrm{d}t = \lambda(N(c(t)) \times w(t))$$

kifejezésben szereplő λ szám az *algebrai értéke* a w kovariáns deriváltjának a t pontban, amit $[\mathrm{D}w/\mathrm{d}t]$ szimbólummal jelölünk. Ez természetesen függ az S felület irányításától (a normálvektor választásától). Könnyen meggondolható, hogy

$$[\mathrm{D}w/\mathrm{d}t] = \langle w'(t), N(c(t)) \times w(t)\rangle.$$

Az S irányított felületen fekvő c természetes paraméterezésű görbe kovariáns deriváltjának $k_g = [\mathrm{D}c'(t)/\mathrm{d}t]$ algebrai értékét *geodetikus görbületnek* nevezzük. Meggondolható, hogy $\kappa^2 = k_g^2 + k_n^2$.

11. Gauss–Bonnet-tétel

Legyen $c\colon [0,l] \to S$ egy egyszerű, zárt, folytonos, darabonként reguláris görbe. Az utóbbi tulajdonság alatt azt értjük, hogy a $[0,l]$ intervallumnak van olyan $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = l$ felosztása, hogy c reguláris görbe a $[t_i, t_{i+1}]$ intervallumokra megszorítva. A $c(t_i)$ pontokat *csúcsnak* nevezzük. A csúcsokban értelmezzük a θ *külső szöget* a következő módon. Legyen $|\theta|$ a $c'(t_i - 0)$ és a $c'(t_i + 0)$ szöge, az előjelet a $\det(c'(t_i - 0), c'(t_i + 0), N(c(t_i)))$ határozza meg. Ha $|\theta| = \pi$, akkor elegendő kicsi ε-ra a $\det(c'(t_i - \varepsilon), c'(t_i + \varepsilon), N(c(t_i)))$ előjel már állandó, ez lesz a megfelelő előjel. Az $\alpha_i\colon [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}$ függvény a t pontban a φ_u és $c'(t)$ szögét adja meg.

18. állítás.

$$\sum_{i=0}^{k}(c_i(t_{i+1}) - c_i(t_i)) + \sum_{i=0}^{k}\theta_i = \pm 2\pi,$$

ahol az előjel a c irányításától függ.

Egy $R \subset S$ zárt részhalmazt *egyszerű tartománynak* nevezünk, ha homeomorf a körlappal, és a határa egy egyszerű, zárt, folytonos, darabonként reguláris c görbe képe. Azt mondjuk, hogy a c pozitívan irányított, ha a c görbén körüljárva az R halmaz ,,balra esik”.

Ha $\varphi\colon U \to S$ egy paraméterezés, akkor az $f\colon R \to \mathbb{R}$ függvényt ($R \subseteq \varphi(U)$) a következő formula segítségével tudjuk integrálni

$$\iint_{\varphi^{-1}(R)} f(\varphi(u,v))\|\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

A 9. állításhoz hasonlóan meggondolható, hogy ennek az integrálnak az értéke nem függ a φ paraméterezés választásától, ezért ezt $\iint_R f\,\mathrm{d}\sigma$-val fogjuk jelölni. Az integrál definícióját kiterjeszthetjük olyan tartományokra is, melyek nem fedhetők le egyetlen koordinátakörnyezettel.

6. tétel (Lokális Gauss–Bonnet-tétel). *Legyen $R \subset S$ egy egyszerű tartomány, melynek határa az egyszerű, zárt, folytonos, darabonként reguláris c görbe képe. Tegyük fel, hogy a c ívhossz szerint* *van paraméterezve, pozitívan irányított, és a csúcsai $c(s_0), c(s_1), \ldots, c(s_k)$, a külső szögei $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k$. Ekkor*

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)\,\mathrm{d}s + \iint_R \mathcal{K}\,\mathrm{d}\sigma + \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 2\pi,$$

ahol $k_g(s)$ a c görbe geodetikus görbülete az s pontban, és $\mathcal{K}(p)$ az S felület Gauss-görbülete a p pontban.

A következő két állítás egyszerű következménye a tételnek:

19. állítás. *Ha S negatív vagy 0 Gauss-görbületű felület, és γ_1, γ_2 két $p \in S$-ből induló geodetikus, akkor nem találkozhatnak úgy, hogy egyszerű tartományt határolnak.*

20. állítás. *Ha T egy geodetikus háromszög, melynek külső szögei $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, akkor az $\alpha_i = \pi - \theta_i$ szögekre*

$$\iint_T \mathcal{K}\,\mathrm{d}\sigma = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i - \pi.$$

Egy $R \subset S$ részhalmazt *reguláris tartománynak* nevezünk, ha R kompakt, és a határa véges sok diszjunkt egyszerű, zárt, folytonos, darabonként reguláris görbe képének uniója. Egy R reguláris tartomány $\mathcal{T}$ *háromszögelése* T_i háromszögek $(i = 1, \ldots n)$, melyekre $\cup_{i=1}^{n} T_i = R$ és ha $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, akkor $T_i \cap T_j$ közös él vagy csúcs. Egy adott $\mathcal{T}$ háromszögelésnél jelölje C a csúcsok, E az élek, és L a háromszögek számát. Ekkor $C - E + L = \chi$ az *Euler(–Poincaré)-karakterisztika.*

21. állítás. *Minden reguláris tartománynak van háromszögelése.*

22. állítás. *Adott paraméterezéshez van olyan háromszögelés, melynél minden háromszög egy koordinátakörnyezettel lefedhető.*

23. állítás. *Az Euler-karakterisztika nem függ a háromszögeléstől.*

Az utóbbi állítás szerint jelölhetjük az R reguláris tartomány Euler-karakterisztikáját $\chi(R)$-rel. Például a gömb Euler-karakterisztikája 2, a tóruszé 0, a dupla tóruszé -2, az n fogantyús tóruszé $-2(n-1)$.

24. állítás. *Homeomorfizmus erejéig az Euler-karakterisztika meghatározza a kompakt $\mathbb{R}^3$-beli felületeket.*

7. tétel (Globális Gauss–Bonnet-tétel). *Ha $R \subset S$ egy reguláris tartomány, melynek a határoló görbéi $c_1, c_2, \ldots c_n$, melyek pozitív irányításúak, és $\theta_1, \ldots, \theta_p$ a külső szögek. Ekkor*

$$\sum_{i=0}^{n} \int_{c_i} k_g(s)\,\mathrm{d}s + \iint_R \mathcal{K}\,\mathrm{d}\sigma + \sum_{i=0}^{p} \theta_i = 2\pi\chi(R).$$

A tételt $R = S$-re alkalmazva kapjuk, hogy $\iint_S \mathcal{K}\,\mathrm{d}\sigma = 2\pi\chi(S)$. A következő két állítás egyszerű következménye a tételnek:

25. állítás. *Kompakt pozitív Gauss-görbületű felület homeomorf a gömbbel.*

26. állítás. *Kompakt pozitív Gauss-görbületű felületen ha γ_1, γ_2 zárt geodetikusok, akkor γ_1 metszi γ_2-t.*

Bizonyításvázlat. A 25. állítás szerint a felület homeomorf a gömbbel. Ha nem metszenék egymást, akkor az általuk határolt R tartomány Euler-karakterisztikája 0 lenne, és így ellentmondásba jutnánk a tétellel. □