# 1. Parametrizált görbék definíciója, típusai

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nem feltétlenül korlátos intervallum. *Parametrizált görbének* nevezünk egy $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ differenciálható leképezést, melyre minden $t \in I$-re $c'(t) \neq \mathbf{0}$ (immerzió). Néha szükségünk lesz arra, hogy $c$ többször is differenciálható, mindig feltesszük, hogy elegendően sokszor differenciálható. Az $I$ intervallum a görbe *paramétertartománya*, melynek $t \in I$ elemei a görbe *paraméterei*. Egy $t \in I$ paraméterhez tartozó $c(t)$ pontot a görbe $t$ paraméterű pontjának nevezzük. A továbbiakban görbén mindig parametrizált görbét értünk, azaz nem csak az $\mathrm{Im}c \subset \mathbb{R}^3$ ponthalmazt tekintjük, hanem a paraméterezést is.

Ha $\mathrm{Im}c$ a tér egy (affin) síkjában fekszik, akkor a $c$ görbe *síkgörbe*.

A $c$ görbe *érintőegyenese* a $t_0$ paraméterű pontban a $c(t_0)$ ponton átmenő, $c'(t_0)$ irányvektorú egyenes, azaz a $c(t_0) + \alpha c'(t_0)$ (paraméterezett) egyenes ($\alpha \in \mathbb{R}$).

A $c$ görbét *biregulárisnak* hívjuk, ha minden $t \in I$ paraméterre $c'(t)$ és $c''(t)$ lineárisan függetlenek. Bireguláris görbe $t_0$ paraméterhez tartozó *simulósíkja* a $c(t_0)$ ponton átmenő, az első két derivált által kifeszített sík, melyet paraméterezhetünk $\{c(t_0) + \alpha c'(t_0) + \beta c''(t_0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ alakban.

A $c_1\colon I \to \mathbb{R}^3$ és a $c_2\colon I \to \mathbb{R}^3$ görbék *kongruensek*, ha van egy olyan $f$ egybevágóság, hogy $c_2 = f \circ c_1$. Ha az $f$ eltolás, akkor *paralel* görbék. Könnyen meggondolható, hogy mindkettő ekvivalenciareláció.

**1. állítás.** *Ha egy $c\colon I \to \mathbb{R}$ bireguláris parametrizált görbének a $t$ paraméterű pontban az érintőegyenese $e$, simulósíkja $S$, akkor az $f$ egybevágóság általi $\tilde{c} = f \circ c$ képe szintén bireguláris parametrizált görbe, melynek a $t$ pontban az érintőegyenese $f(e)$, simulósíkja $f(S)$.*

**Bizonyításvázlat.** Az $f$ egybevágóságot felbonthatjuk egy $\varphi$ ortogonális transzformáció, és egy $\tau$ eltolás kompozíciójára: $f = \tau \circ \varphi$. Ekkor $f$ deriváltja minden pontban $\varphi$, és így a $\tilde{c}$ görbe deriváltja a $t$ pontban $\tilde{c}'(t) = \varphi(c'(t))$. Mivel a $\varphi$ ortogonális, így a magtere triviális, melyből látjuk, hogy $\tilde{c}$ parametrizált görbe. Hasonlóan felírhatjuk a második deriváltat is: $\tilde{c}''(t) = \varphi(c''(t))$. Mivel $\varphi$ ortogonális, ezen deriváltak mutatják, hogy $\tilde{c}$ bireguláris. A $\tilde{c}$ görbe érintőegyenesének egy pontja $\tilde{c}(t) + \alpha\tilde{c}'(t) = f(c(t)) + \alpha\varphi(c'(t)) = \tau \circ \varphi(c(t) + \alpha c'(t))$, így az érintőegyenes $f(e)$. Hasonlóan meggondolható a simulósík is. $\square$

A $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ görbe *ekvivalens* a $\tilde{c}\colon \tilde{I} \to \mathbb{R}^3$ görbével, ha van olyan $\Theta\colon I \to \tilde{I}$ diffeomorfizmus (oda-vissza differenciálható bijekció), hogy $c = \tilde{c} \circ \Theta$. A $\Theta$ leképezést *paramétertranszformációnak* nevezzük, és a $c$ görbét a $\tilde{c}$ görbe *átparaméterezettjének* hívjuk. Mivel a $\Theta$ diffeomorfizmus, a $\Theta'$ derivált nem lehet 0, és a folytonosság miatt az előjele állandó. Ha ez az előjel pozitív, akkor $\Theta$ irányítástartó, ha negatív, akkor irányításváltó. A görbék között az immént bevezetett ekvivalencia reláció egy ekvivalenciareláció. Két ekvivalens görbe mint ponthalmaz megegyezik.

**2. állítás.** *Ha $\Theta\colon I \to \tilde{I}$ diffeomorfizmus, akkor egy $\tilde{c}\colon \tilde{I} \to \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe $c = \tilde{c} \circ \Theta\colon I \to \mathbb{R}^3$ átparaméterezettje is parametrizált görbe. Az átparaméterezés során a biregularitás megőrződik.*

**Bizonyításvázlat.** A $c$ összetett függvény differenciálható, mivel $\tilde{c}$ és $\Theta$ az. A láncszabályt alkalmazva

$$c'(t) = \tilde{c}'(\Theta(t))\Theta'(t). \tag{1}$$

Tudjuk, hogy $\tilde{c}'$ és $\Theta'$ nem tűnik el, így $c'$ sem.

A biregularitás megőrződését indirekten bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $c$ nem bireguláris, azaz van egy olyan $t_0 \in I$ paraméterpont, melyre $c'(t_0)$ és $c''(t_0)$ lineárisan összefüggenek. Mivel $c'(t_0) \neq \mathbf{0}$, így létezik egy $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $c''(t_0) = \lambda c'(t_0)$. Ezt az (1) segítségével írjuk fel:

$$\tilde{c}''(\Theta(t_0))(\Theta'(t_0))^2 + \tilde{c}'(\Theta(t_0))\Theta''(t_0) = \lambda\tilde{c}'(\Theta(t_0))\Theta'(t_0),$$
$$\tilde{c}''(\Theta(t_0))(\Theta'(t_0))^2 + \tilde{c}'(\Theta(t_0))\left(\Theta''(t_0) - \lambda\Theta'(t_0)\right) = \mathbf{0}.$$

Mivel ez egy lineáris kombináció a $\tilde{c}$ görbe $\Theta(t_0)$-beli deriváltjai között, és $\tilde{c}$ bireguláris, azt kapjuk, hogy $\Theta'(t_0) = 0$, ami ellentmondás. $\square$

**3. állítás.** *A görbék érintőegyenese, és biregularitás esetén a simulósíkja paramétertranszformációval szemben invariáns.*

**Bizonyításvázlat.** Az előző állítás jelöléseit és eredményeit használva, a $c$ görbe $t$ ponthoz tartozó érintőegyenesének pontjai:

$$c(t) + \alpha c'(t) = \tilde{c}(\Theta(t)) + \alpha\tilde{c}'(\Theta(t))\Theta'(t) = \tilde{c}(\Theta(t)) + (\alpha\Theta'(t))\tilde{c}'(\Theta(t)),$$

ami pontosan a $\tilde{c}$ görbe $\Theta(t)$ paraméteréhez tartozó érintőegyenes felírása ($\Theta'(t) \neq 0$ állandó).

A simulósík hasonlóan meggondolható. □

## 2. Görbék ívhossza

**4. állítás.** *Egy $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ görbére*

$$\|c(b) - c(a)\| \leq \int_a^b \|c'(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

**Bizonyításvázlat.** Tetszőleges $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ egységvektorra használva a Newton–Leibniz-tételt és a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget

$$\langle c(b) - c(a), \mathbf{e}\rangle = \int_a^b \langle c'(t), \mathbf{e}\rangle \,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \|c'(t)\| \,\mathrm{d}t.$$

Ezt az egyenlőtlenséget az $\mathbf{e} = \frac{c(b)-c(a}{\|c(b)-c(a)\|}$ egységvektorra felírva kapjuk a bizonyítandó állítást. □

A 4. állításban szereplő integrált triviálisan becsülve kapjuk a következőt:

**Görbék középérték tétele.** *Tetszőleges $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ görbére*

$$\|c(b) - c(a)\| \leq \sup_{a \leq t \leq b} \|c'(t)\|(b-a).$$

Tekintsünk egy $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ görbét. Az $[a,b]$ intervallum egy $\mathcal{F}$ *felosztásán* az $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ osztópontokat értjük. Az $\mathcal{F}$ felosztás finomsága a $\delta = \max_{i=1,\ldots,n}(t_i - t_{i-1})$ szám. Az $\mathcal{F}$ felosztás *finomításán* egy olyan $\mathcal{G}$ felosztást értünk, melyben szerepelnek az $\mathcal{F}$ felosztás $t_i$ osztópontjai.

A $c$ görbe $\mathcal{F}$ felosztáshoz tartozó beírt poligon hossza

$$\ell(c, \mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{n} \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|.$$

A háromszög-egyenlőtlenségből adódik, hogy ha $\mathcal{G}$ az $\mathcal{F}$ felosztás finomítása, akkor $\ell(c,\mathcal{F}) \leq \ell(c,\mathcal{G})$. A $c$ görbe ívhossza a beírt poligonok hosszának legkisebb felső korlátja, azaz

$$L(c) = \sup\{\ell(c,\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ az } [a,b] \text{ felosztása}\}.$$

**5. állítás.** *Adott $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ görbére, minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $\mathcal{F}$ egy $\delta$-nál finomabb felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, akkor*

$$\left| \int_a^b \|c'(t)\| \,\mathrm{d}t - \ell(c,\mathcal{F}) \right| < \varepsilon.$$

**Bizonyításvázlat.** Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$-t. A Riemann-integrál definíciója szerint van olyan $\delta_1 > 0$, hogy ha az $\mathcal{F}$ felosztás $\delta_1$-nél finomabb, akkor

$$\left| \int_a^b \|c'(t)\| \, \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n} \|c'(t_i)\|(t_i - t_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

A $c'$ függvény egyenletesen folytonos az $[a, b]$ intervallumon, így van olyan $\delta_2 > 0$ szám, hogy ha $t, s \in [a, b]$ és $|t - s| < \delta_2$, akkor

$$\|c'(t) - c'(s)\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Legyen $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, és tekintsünk egy $\delta$-nál finomabb $\mathcal{F}$ felosztást. Ekkor felhasználva a görbék középérték tételét

$$\begin{aligned}\left| \ell(c, \mathcal{F}) - \sum_{i=1}^{n} \|c'(t_i)\|(t_i - t_{i-1}) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| - \sum_{i=1}^{n} \|c'(t_i)\|(t_i - t_{i-1}) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^{n} \sup_{t_{i-1} \leq s_i \leq t_i} \|c'(s_i)\|(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \|c'(t_i)\|(t_i - t_{i-1}) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^{n} \sup_{t_{i-1} \leq s_i \leq t_i} \|c'(s_i) - c'(t_i)\|(t_i - t_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Ez a (2) egyenlőtlenséggel adja a bizonyítandó állítást. □

**Következmény.** *Tetszőleges $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ görbére*

$$\int_a^b \|c'(t)\| \, \mathrm{d}t = L(c).$$

A $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ görbe *pályasebessége* a deriváltvektorának a hossza, a $v\colon I \to \mathbb{R}, v(t) = \|c'(t)\|$ függvény. Ha ez a függvény azonosan 1, akkor a $c$ görbét *egység-pályasebességűnek*, *ívhossz szerint paraméterezettnek* vagy *természetes paraméterezésűnek* nevezzük.

Egy $c$ görbe *ívhossza* a pályasebességének a paramétertartományon vett integrálja (akkor is, ha $I$ nem véges):

$$L(c) = \int_I v(t) \, \mathrm{d}t = \int_I \|c'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

Ha az $I$ intervallum bal oldali végpontja $a$ (ami akár $-\infty$ is lehet), akkor a $\zeta\colon I \to [0, L(c)]$ *ívhossz-függvényt* a

$$\zeta(t) = \int_a^t v(\tau) \, \mathrm{d}\tau$$

formula definiálja. Azt adja meg, hogy milyen hosszú a görbe a $t$ paraméterű pontig.

Bár a következő két állítás egyszerűen meggondolható az ívhossz beírt poligonos definíciójából, az integrálos definícióból bizonyítjuk.

**6. állítás.** *A $c$ görbének és az $f$ egybevágósági transzformációval elmozgatott $\tilde{c} = f \circ c$ görbének az ívhossza megegyezik.*

**Bizonyításvázlat.** Az 1. állítás bizonyításához hasonlóan $f = \tau \circ \varphi$, és ekkor

$$\|\tilde{c}'(t)\| = \|\varphi(c'(t))\| = \|c'(t)\|,$$

mivel a $\varphi$ normatartó. Ekkor az ívhossz:

$$L(\tilde{c}) = \int_I \|\tilde{c}'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_I \|c'(t)\| \, \mathrm{d}t = L(c).$$

□

**7. állítás.** *Az átparaméterezett görbék ívhossza nem változik.*

**Bizonyításvázlat.** Feltehetjük, hogy a $\Theta\colon I \to \tilde{I}$ paramétertranszformáció irányítástartó. Ekkor a $c = \tilde{c} \circ \Theta$ görbe ívhossza

$$L(c) = \int_I \|c'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_I \|\tilde{c}'(\Theta(t))\Theta'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_I \|\tilde{c}'(\Theta(t))\|\Theta'(t) \,\mathrm{d}t = \int_{\tilde{I}} \|\tilde{c}'(\tilde{t})\| \,\mathrm{d}\tilde{t} = L(\tilde{c}),$$

ahol az utolsó előtti egyenlőségnél helyettesítéses integrálást alkalmaztunk. □

**8. állítás.** *Minden görbe ekvivalens egy ívhossz szerint paraméterezett görbével.*

**Bizonyításvázlat.** A $\zeta$ ívhosszfüggvény egy pozitív függvény integrálfüggvénye, így szigorúan monoton növő és differenciálható ($\zeta'(t) = \|c'(t)\| > 0$). Értelmezhető így a $\zeta^{-1}\colon [0, L(c)] \to I$ inverze, mely az inverz függvény tétele szerint differenciálható, és deriváltja

$$(\zeta^{-1})'(s) = \frac{1}{\zeta'(\zeta^{-1}(s))} = \frac{1}{\|c'(\zeta^{-1}(s))\|}.$$

Tehát $\zeta^{-1}$ diffeomorfizmus, és így a 2. állítás szerint a $\tilde{c} = c \circ \zeta^{-1}$ parametrizált görbe, mely a $c$ görbével ekvivalens. Ennek a pályasebessége

$$\tilde{v}(s) = \|\tilde{c}'(s)\| = \|c'(\zeta^{-1}(s))(\zeta^{-1})'(s)\| = \left\| c'(\zeta^{-1}(s)) \frac{1}{\|c'(\zeta^{-1}(s))\|} \right\| = 1,$$

azaz valóban ívhossz szerint paraméterezett. □

## 3. Természetes paraméterezésű görbék görbülete és torziója

Ebben az alfejezetben minden görbéről feltesszük, hogy ívhossz szerint van paraméterezve. Ennek jelzésére $t$ helyett $s$ paramétert használunk. Egy természetes paraméterezésű $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ görbe *görbülete* a $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$, $\kappa(s) = \|c''(s)\|$ függvény.

**9. állítás.** *A görbület egybevágósági transzformációval és paramétertranszformációval szemben invariáns.*

**Bizonyításvázlat.** Az egybevágóságinvariancia az eddigi jelöléseket használva a $\tilde{c}''(s) = \varphi(c''(s))$ egyenlőségen és $\varphi$ normatartásán alapszik. A paramétertranszformációnál azt használjuk, hogy az átparaméterezett görbe is természetes paraméterezésű, amiből kapjuk, hogy $|\Theta'(s)| = 1$, és így $\Theta''(s) = 0$. □

Természetes paraméterezés esetén $\|c'(s)\| = 1$, amit deriválva kapjuk, hogy a $c'(s)$ és a $c''(s)$ vektorok merőlegesek. Így egy természetes paraméterezésű görbe pontosan akkor bireguláris, ha a görbülete nem tűnik el.

**10. állítás.** *Egy görbe pontosan akkor parametrizált egyenes, ha a görbületi függvénye azonosan 0.*

**Bizonyításvázlat.** Egyenes esetén az irányvektorral párhuzamosak a deriváltak, így sehol nem bireguláris, azaz a görbülete mindenütt 0. Visszafelé, ha a görbülete 0, akkor a $c'$ függvény konstans, azaz $c(s) = \mathbf{a}s + \mathbf{b}$ alakú ($\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$), azaz a görbe egyenes. □

A továbbiakban a görbékről a biregularitást is feltesszük. A $t(s) = c'(s)$ egységvektort *érintővektornak* nevezzük. Az $n(s) = \frac{c''(s)}{\kappa(s)}$ vektort ($c''(s)$ irányú egységvektor) a $c(s)$ pontbeli *főnormálvektornak* nevezzük. Már láttuk, hogy ez a vektor merőleges az érintővektorra. Ezek $b(s) = t(s) \times n(s)$ vektoriális szorzatát *binormális vektornak* nevezzük.

A $(t, n, b)$ hármast a görbe *Frenet-féle hároméljének* vagy *kísérő triéderének* nevezzük. Ez a görbe minden pontjában egy pozitívan irányított ortonormált bázis.

A $t(s)$ és a $n(s)$ vektorok a $c(s)$-beli simulósíkot feszítik ki. Az $n(s)$ és a $b(s)$ által kifeszített síkot *normálsíknak*, míg a $t(s)$ és a $b(s)$ által kifeszített síkot *rektifikáló síknak* nevezzük.

**11. állítás.** *Legyen a $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ természetes paraméterezésű bireguláris görbe Frenet-féle hároméle $(t, n, b)$, és $f$ a tér egy egybevágósága, melynek lineáris része $\varphi$. Ekkor a $\tilde{c} = f \circ c$ görbe Frenet-féle hároméle*

$$\tilde{t} = \varphi \circ t, \qquad \tilde{n} = \varphi \circ n, \qquad \tilde{b} = \varepsilon\varphi \circ b,$$

*ahol $\varepsilon = \det \varphi = \pm 1$.*

**Bizonyításvázlat.** Az 1. állítás bizonyításában már láttuk, hogy $\tilde{c}'(s) = \varphi(c'(s))$ és $\tilde{c}''(s) = \varphi(c''(s))$. Ez az érintővektorokra vonatkozó azonosságot azonnal adja, és ha figyelembe vesszük, hogy $\varphi$ normatartó, akkor a normálvektorok közöttit is látjuk. A binormális vektoroknál a $\varphi(\mathbf{a}) \times \varphi(\mathbf{b}) = \det \varphi \cdot \varphi(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ összefüggést kell használni. □

**12. állítás.** *A $\tilde{c} = c \circ \Theta$ átparaméterezett görbe Frenet-féle hároméle*

$$\tilde{t} = \varepsilon t \circ \Theta, \qquad \tilde{n} = n \circ \Theta, \qquad \tilde{b} = \varepsilon b \circ \Theta,$$

*ahol $\varepsilon = \Theta' = \pm 1$*

**Bizonyításvázlat.** Az eddigiek alapján ez könnyen adódik. □

Tudjuk, hogy $b(s) = t(s) \times n(s)$, melynek a deriváltja

$$b'(s) = t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s),$$

melyben az első tag $\mathbf{0}$, így $b'(s) \perp t(s)$. Másrészt $b(s)$ egységhosszú, így $b'(s) \perp b(s)$. Ezekből azt kapjuk, hogy a $b'(s)$ vektor $n(s)$ irányú. Így a $b'(s)$ vektort felírhatjuk $b'(s) = -\tau(s)n(s)$ alakban. Az így definiált $\tau\colon I \to \mathbb{R}$ függvényt *torziófüggvénynek* nevezzük.

**13. állítás.** *A torziófüggvény irányítástartó egybevágósággal, és tetszőleges paramétertranszformációval szemben invariáns, míg irányításváltó egybevágóság esetén előjelet vált.*

**Bizonyításvázlat.** Az előző két állításból könnyen kihozható. □

Az érintővektor deriváltja $t'(s) = c''(s) = \kappa(s)n(s)$.

Az $n(s) = b(s) \times t(s)$ vektor deriváltja

$$n'(s) = b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s) = -\tau(s)n(s) \times t(s) + \kappa(s)b(s) \times n(s) = -\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s).$$

Összefoglalva a Frenet-féle hároméle deriváltjai

$$\begin{array}{rcccc} t'(s) & = & & \kappa(s)n(s) & \\ n'(s) & = & -\kappa(s)t(s) & & +\,\tau(s)b(s) \\ b'(s) & = & & -\tau(s)n(s) & \end{array}$$

melyeket *Frenet-formuláknak* nevezünk.

# 4. Általános görbe görbülete és torziója

Egy nem ívhossz szerint paraméterezett $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ görbét a 8. állítás szerint megkaphatjuk egy $\tilde{c}\colon \tilde{I} \to \mathbb{R}^3$ természetes paraméterezésű görbéből a $c = \tilde{c} \circ \Theta$ átparaméterezéssel, ahol $\Theta\colon I \to \tilde{I}$ irányítástartó paramétertranszformáció. Ekkor értelmezhetjük a $\tilde{c}$ görbe görbületét, torzióját, Frenet-féle háromélét. Ha a $\tilde{c}$ görbe görbülete $\tilde{\kappa}$, torziója $\tilde{\tau}$ és Frenet-féle hároméle $(\tilde{t}, \tilde{n}, \tilde{b})$, akkor a $c$ görbe görbülete $\kappa = \tilde{\kappa} \circ \Theta$, torziója $\tau = \tilde{\tau} \circ \Theta$ és Frenet-féle hároméle $(t, n, b) = (\tilde{t} \circ \Theta, \tilde{n} \circ \Theta, \tilde{b} \circ \Theta)$. Az előző alfejezet eredményei szerint ezek az átparaméterezéstől nem függenek.

Ebben az alfejezetben ezekre adunk explicit, a paramétertranszformációt nem használó kifejezéseket.

A $c(t) = \tilde{c}(\Theta(t))$ összefüggést deriválva kapjuk, hogy

$$c'(t) = \tilde{c}'(\Theta(t))\Theta'(t),$$

és így $v(t) = \|c'(t)\| = \Theta'(t)$, mivel a $\Theta$ paramétertranszformációnk irányítástartó. A második derivált:

$$c''(t) = \tilde{c}''(\Theta(t))(\Theta'(t))^2 + \tilde{c}'(\Theta(t))\Theta''(t).$$

**14. állítás.** *Egy általános $c$ görbére vonatkozó Frenet-egyenletek a következők a $v(t) = \|c'(t)\|$ jelöléssel*

$$\begin{array}{rclccc} t'(t) & = & & v(t)\kappa(t)n(t) & \\ n'(t) & = & -v(t)\kappa(t)t(t) & & +\, v(t)\tau(t)b(t) \\ b'(t) & = & & -v(t)\tau(t)n(t) & \end{array}$$

**Bizonyításvázlat.** Ha például a $t(t) = \tilde{t}(\Theta(t))$ báziselemet deriváljuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$t'(t) = \tilde{t}'(\Theta(t))\Theta'(t) = \tilde{\kappa}(\Theta(t))\tilde{n}(\Theta(t))v(t) = \kappa(t)n(t)v(t).$$

Hasonlóan kapjuk a többi összefüggést is. □

**15. állítás.** *A $c$ általános görbe Frenet-féle háromléle a következő:*

$$t(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}, \qquad b(t) = \frac{c'(t) \times c''(t)}{\|c'(t) \times c''(t)\|}, \qquad n(t) = b(t) \times t(t).$$

**Bizonyításvázlat.** Az érintővektor a definíciónk szerint:

$$t(t) = \tilde{c}'(\Theta(t)) = \frac{c'(t)}{\Theta'(t)} = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|},$$

tehát az érintővektor ebben az eseten is az első derivált lenormálva.

A binormális vektort a $\tilde{c}$ görbe érintő és főnormálisvektorának vektoriális szorzatából kapjuk, mely pozitív szorzótól eltekintve

$$b(t) \sim \tilde{c}'(t) \times \tilde{c}''(t) \sim c'(t) \times c''(t),$$

amiből a $b(t)$ vektort normálással megkapjuk. Arra is hivatkozhattunk volna, hogy a binormális vektor a simulósík normálvektora, ami az átparaméterezéstől független (de az irányát meg kell gondolni).

Mivel a Frenet-féle hárömél az általános görbék esetében is pozitívan irányított ortonormált bázis, így a főnormálvektorra adott formulánk is helyes. □

**16. állítás.** *Egy általános $c$ görbe görbületét a*

$$\kappa(t) = \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}$$

*formulával számolhatjuk.*

**Bizonyításvázlat.** Felhasználjuk, hogy $\tilde{c}' \perp \tilde{c}''$, mivel $\tilde{c}$ természetes paraméterezésű, így

$$\kappa(t) = \|\tilde{c}''(\Theta(t))\| = \left\| \frac{(\tilde{c}'(\Theta(t))\Theta'(t)) \times \left(\tilde{c}''(\Theta(t))(\Theta'(t))^2 + \tilde{c}'(\Theta(t))\Theta''(t)\right)}{\Theta'(t)^3} \right\| = \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}.$$

□

**17. állítás.** *Egy általános $c$ görbe torzióját a*

$$\tau(t) = \frac{c'(t)c''(t)c'''(t)}{\|c'(t) \times c''(t)\|^2}$$

*formulával számolhatjuk.*

**Bizonyításvázlat.** A $c$ görbe deriváltjait írjuk fel a $(t, n, b)$ bázisban a 14. állítást használva.

$$\begin{aligned} c' &= vt \\ c'' &= v't + vt' = v't + v^2\kappa n \\ c''' &= v''t + v't' + (v^2\kappa)'n + v^2\kappa n' = v''t + v'v\kappa n + (v^2\kappa)'n + v^2\kappa(-v\kappa t + v\tau b) = \\ &= (v'' - v^3\kappa^2)t + (v'v\kappa + (v^2\kappa)')n + v^3\kappa\tau b. \end{aligned}$$

Ebből $\|c' \times c''\| = v^3\kappa$ és $c'c''c''' = v^6\kappa^2\tau$, amikből következik az állítás. □

A fenti állítás természetes paraméterezésű görbére a

$$\tau(s) = \frac{c'(s)c''(s)c'''(s)}{\kappa(s)^2}$$

formulát adja.

**18. állítás.** *Egy görbe torziója pontosan akkor azonosan 0, ha síkgörbe.*

**Bizonyításvázlat.** Síkgörbe esetén a görbe deriváltjai párhuzamosak a síkkal, így a 17. állítás szerint a torzió nulla.

Ha a torzió 0, akkor a binormális vektor állandó, jelöljük $\mathbf{b}$-vel. Ekkor a $t \mapsto \langle \mathbf{b}, c(t) \rangle$ függvény deriváltja 0, így állandó, azaz a görbe egy $\mathbf{b}$-re merőleges síkban fekszik. □

## 5. Simulókörök és evolúták

Ebben az alfejezetben feltesszük, hogy a szóban forgó görbék biregulárisak, azaz a görbületük sehol sem tűnik el: $\kappa(t) \neq 0$. Egy $c$ görbe *görbületi sugara* a görbületének a reciproka, azaz a $t$ paraméterű pontban $\frac{1}{\kappa(t)}$. A $t$ paraméterű pontjához tartozó *görbületi középpontja* a

$$c^*(t) = c(t) + \frac{1}{\kappa(t)} n(t)$$

pont. A $c^*(t)$ középpontú, $\frac{1}{\kappa(t)}$ sugarú, a simulósíkban fekvő kört a görbe *simulókörének* nevezzük.

Síkgörbék esetén a fent definiált $c^*$ leképezést a görbe *evolútájának* nevezzük.

**19. állítás.** *Ha egy síkgörbe görbületének deriváltja sehol nem tűnik el, akkor az evolútája parametrizált görbe.*

**Bizonyításvázlat.** Mivel a $\kappa$ sehol nem tűnik el, így a $c^*$ leképezés differenciálható, elég csak azt ellenőrizni, hogy a deriváltja nem tűnik el. A derivált

$$c^{*\prime}(t) = c'(t) + \left(\frac{1}{\kappa(t)}\right)' n(t) + \frac{1}{\kappa(t)} n'(t) = v(t)t(t) - \frac{\kappa'(t)}{\kappa(t)^2} n(t) + \frac{1}{\kappa(t)}(-v(t)\kappa(t)t(t)) = -\frac{\kappa'(t)}{\kappa(t)^2} n(t),$$

ami a feltételek szerint nem tűnik el. □

A továbbiakban azt is feltesszük, hogy a $c$ görbe görbületének a deriváltja nem tűnik el.

**20. állítás.** *A $c^*$ görbe $t$-beli érintőegyenese a $c$ görbe $t$-beli normálisegyenese.*

**Bizonyításvázlat.** A $c^*$ görbe érintőegyenese felhasználva az előző állításban kiszámolt deriváltat:

$$c^*(t) + \alpha c^{*\prime}(t) = c(t) + \left(\frac{1}{\kappa(t)} - \alpha\frac{\kappa'(t)}{\kappa(t)^2}\right) n(t).$$

Ha $\alpha$ befutja a valós számokat, akkor $\frac{1}{\kappa(t)} - \alpha\frac{\kappa'(t)}{\kappa(t)^2}$ szintén befutja a valós számokat. Így ez a kifejezés a $c$ görbe normálegyenese. □

**21. állítás.** *A $c$ görbe két $t_1 \neq t_2$ pontbeli normálisának metszete a $c^*(t)$ ponthoz tart, amint $t_1, t_2 \to t$.*

**Bizonyításvázlat.** A két normális metszete valamilyen $\lambda_1, \lambda_2$ számokkal:

$$c(t_1) + \lambda_1 n(t_1) = c(t_2) + \lambda_2 n(t_2).$$

Átrendezve:

$$\frac{c(t_1) - c(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{\lambda_2 n(t_2) - \lambda_1 n(t_1)}{t_1 - t_2}$$

Felhasználva, hogy $n(t_2) = n(t_1) + n'(t_1)(t_2 - t_1) + o(t_2 - t_1)$,

$$\frac{c(t_1) - c(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{t_1 - t_2} n(t_1) - \lambda_2 n'(t_1) + \frac{\lambda_2 o(t_2 - t_1)}{t_1 - t_2}$$

A bal oldal határértéke $c'(t)$, ha $t_1, t_2 \to t$. Így a jobb oldalnak is van határértéke (és ugyanez). Mivel $n(t)$ és $n'(t)$ merőlegesek, így a $\lambda_1, \lambda_2$ sorozatok konvergensek, és ugyanaz a határértékük, legyen ez a szám $\lambda$. Ekkor a jobb oldal határértéke $-\lambda n'(t)$. A két oldal egyenlősége:

$$c'(t) = -\lambda n'(t).$$

Síkgörbék esetén a torzió 0, így a megfelelő Frenet-egyenletből kapjuk, hogy

$$n'(t) = -v(t)\kappa(t)t(t) = -\kappa(t)c'(t).$$

Az utóbbi két egyenletből kapjuk, hogy $\lambda = \frac{1}{\kappa(t)}$, így a metszéspontok határértéke a $c^*(t)$ pont. □

Egy természetes paraméterezésű $c$ síkgörbe egy *evolvense* a $\hat{c}(t) = c(t) + (\lambda - t)c'(t)$ görbe, ahol a $\lambda \in \mathbb{R}$ paraméter. Könnyen meggondolható, hogy $t \neq \lambda$ esetén ez egy parametrizált görbe.

**22. állítás.** *Egy $c$ görbe bármely evolvensének evolútája a $c$ görbe.*

**Bizonyításvázlat.** Tekintsük a $\hat{c}(t) = c(t) + (\lambda - t)c'(t)$ evolvens görbe deriváltjait a $c$ görbe Frenet-bázisával kifejezve.

$$\hat{c}'(t) = (\lambda - t)c''(t) = (\lambda - t)\kappa(t)n(t)$$
$$\hat{c}''(t) = -\kappa(t)n(t) + (\lambda - t)\kappa'(t)n(t) + (\lambda - t)\kappa(t)n'(t) = (-\kappa(t) + (\lambda - t)\kappa'(t))n(t) - (\lambda - t)\kappa^2(t)t(t),$$

Ebből látszik, hogy $t < \lambda$ esetén a $\hat{c}$ görbe Frenet-féle hároméle $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}) = (n, -t, b)$. A $\hat{c}$ görbülete:

$$\hat{\kappa}(t) = \frac{\|\hat{c}'(t) \times \hat{c}''(t)\|}{\|\hat{c}'(t)\|^3} = \frac{(\lambda - t)^2\kappa^3(t)}{(\lambda - t)^3\kappa^3(t)} = \frac{1}{\lambda - t}$$

Ebből a $\hat{c}$ görbe evolútája:

$$\hat{c}^*(t) = \hat{c}(t) + \frac{1}{\hat{\kappa}(t)}\hat{n}(t) = c(t) + (\lambda - t)c'(t) - (\lambda - t)c'(t) = c(t),$$

azaz az eredeti görbe. □

Láttuk, hogy az evolvens deriváltvektora az eredeti görbe főnormális vektorával párhuzamos, így merőleges annak érintővektorára. Ezért az evolvensek az eredeti görbe érintőegyeneseire mindenütt merőlegesek, azaz ortogonális trajektóriák.

# 6. A görbeelmélet alaptétele

**Unicitás-tétel.** *Tegyük fel, hogy a* $c_1, c_2 \colon I \to \mathbb{R}^3$ *természetes paraméterezésű, bireguláris görbék görbület- és torziófüggvénye megegyezik. Ekkor létezik olyan irányítástartó egybevágóság, mely a* $c_1$ *görbét a* $c_2$ *görbébe viszi. Más szóval a görbület- és torziófüggvény irányítástartó egybevágóságtól eltekintve meghatározza a görbéket.*

**Egzisztencia-tétel.** *Adott* $\kappa \colon I \to \mathbb{R}$ *pozitív differenciálható függvényhez, és* $\tau \colon I \to \mathbb{R}$ *differenciálható függvényhez van olyan* $c \colon I \to \mathbb{R}^3$ *(bireguláris) görbe, melynek ezek a görbületi függvényei.*

A Frenet-egyenletek egy lineáris differenciálegyenlet-rendszert adnak a Frenet-bázis elemeire, melyek eltolás erejéig meghatározzák a görbéket. Így a fenti tételek a differenciálegyenletek egzisztencia és unicitás tételén alapszanak.

# 7. Síkgörbék és a körülfordulási szám

Síkgörbék esetén a biregularitás elég erős megkötés, másrészt a Frenet-bázisnak úgyis csak a $t, n$ eleme érdekes, a binormális vektor mindig merőleges a síkra. Ekkor a sík $(t, n)$ bázisát érdemes pozitívan irányítva megválasztani, ehhez esetleg az $n$ irányát ellentétesre kell módosítani. Ekkor a $\kappa$ görbület értékét is ellentétesnek választjuk, hogy fennmaradjon a $t'(t) = v(t)\kappa(t)n(t)$ összefüggés.

**23. állítás.** *Ha a síkgörbe paraméterezése* $c(t) = (x(t), y(t))$*, akkor a görbülete*

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}}.$$

**Bizonyításvázlat.** A $b(t)$ vektor irányát a $c'(t) \times c''(t) = (0, 0, x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t))$ vektor iránya határozza meg. Ha ennek első koordinátája pozitív, akkor felfelé mutat, és ekkor a $(t, n)$ pozitívan van irányítva a síkban. Ha viszont az első koordináta negatív, akkor a görbület negatív. Így a 16. állítás adja a fenti formulát. □

A következőkben tekintsünk egy természetes paraméterezésű $c(s) = (x(s), y(s))$ síkgörbét. Ennek a $t(s) = (x'(s), y'(s))$ érintővektora az egységkör kerületén van, jelöljük a vízszintessel bezárt szögét $\alpha(s)$-sel (lokálisan definiálhatjuk az $\alpha(s) = \operatorname{arctg}\frac{y'(s)}{x'(s)}$ formulával). Ekkor $t(s) = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$, és így a főnormálvektor $n(s) = (-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s))$. A $t$-t deriválva kapjuk, hogy

$$t'(s) = (-\sin\alpha(s)\alpha'(s), \cos\alpha(s)\alpha'(s)) = \alpha'(s)n(s).$$

Másrészt $t'(s) = \kappa(s)n(s)$, amiből $\alpha'(s) = \kappa(s)$. Ekkor

$$\int_a^b \kappa(s)\,\mathrm{d}s = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Ha a $c \colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ görbe *zárt* (azaz $c(a) = c(b)$, $c'(a) = c'(b)$, stb.), akkor az utóbbi különbség $2\pi$ egész többszöröse, azaz

$$\int_a^b \kappa(s)\,\mathrm{d}s = 2\pi N.$$

Az itt szereplő $N$ egész számot nevezzük a görbe *körülfordulási számának.*

Egy $c \colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ görbe *egyszerű*, ha $t_1 \neq t_2 \in [a, b)$-re $c(t_1) \neq c(t_2)$.

**1. tétel** (Umlaufsatz)**.** *Egyszerű görbék körülfordulási száma* $\pm 1$.

Legyen $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ görbe, és $\mathcal{F} : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ felosztása. Ekkor a *teljes görbületének az $\mathcal{F}$-hez tartozó közelítése*

$$K(c, \mathcal{F}) = \sum_{i=1}^{n-1} \angle(c(t_i) - c(t_{i-1}), c(t_{i+1}) - c(t_i)).$$

A *teljes görbület* pedig ezek legkisebb felső korlátja:

$$K(c) = \sup\{K(c, \mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ az } [a,b] \text{ felosztása}\}.$$

**Fox–Milnor-tétel.** *Bármely $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ természetes paraméterezésű görbére*

$$K(c) = \int_a^b \|c''(s)\| \,\mathrm{d}s.$$

## 8. Izoperimetrikus egyenlőtlenség

Egy egyszerű zárt síkgörbe a síkot egy korlátos és egy nem korlátos részre osztja (Jordan-tétel). A korlátos részt nevezzük a görbe által közrefogottnak. Egy ilyen görbe *pozitívan irányított*, ha a közrefogott területet pozitív irányban kerüli meg (azaz a görbén haladva a korlátos rész bal kéz felé esik).

**Lemma.** *Egy egyszerű, zárt $c\colon [0,l] \to \mathbb{R}^2, c(t) = (x(t), y(t))$ görbe által közrefogott területet a*

$$A = \int_0^l x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^l y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$$

*formulákkal számolhatjuk.*

**Bizonyításvázlat.** A két formula egyenlőségét parciális integrálással bizonyíthatjuk. A második integrál pedig szektorszerű tartományokra (két függvénygrafikon közti terület) egyszerű helyettesítéses integrálás. Az általános esetben pedig felosztjuk a görbe által határolt területet szektorszerű tartományokra. □

**Izoperimetrikus egyenlőtlenség.** *Legyen $c$ egy zárt, egyszerű síkgörbe, melynek a hossza $l$, és legyen a közrezárt terület $A$. Ekkor*

$$4\pi A \leq l^2,$$

*és egyenlőség pontosan akkor van, ha $c$ egy kör.*

**Bizonyításvázlat.** Legyen $e_1, e_2$ két párhuzamos érintő egyenese $c$-nek, melyek között van a $c$. Tekintsünk egy olyan $\tilde{c}$ kört, melyet érintenek az $e_1, e_2$ egyenesek. Legyen az a koordináta-rendszerünk, melynek a középpontja a kör középpontja és az $y$-tengelye párhuzamos az $e_1, e_2$ egyenesekkel. Tegyük fel, hogy a $c(t) = (x(t), y(t))$ görbe természetes paraméterezésű és pozitívan irányított. A $\tilde{c}$ kört paraméterezzük $\tilde{c}(t) = (x(t), \tilde{y}(t))$ módon. A görbék által közrefogott területek:

$$A = \int_0^l x(t)y'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \tilde{A} = \pi r^2 = -\int_0^l \tilde{y}(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ezen formulákat, majd a Cauchy-egyenlőtlenséget használva

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^l x(t)y'(t) - \tilde{y}(t)x'(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^l \left| x(t)y'(t) - \tilde{y}(t)x'(t) \right| \leq \\ &\leq \int_0^l \sqrt{(x(t)^2 + \tilde{y}(t)^2)(x'(t)^2 + y'(t)^2)}\,\mathrm{d}t = \int_0^l \sqrt{\tilde{x}(t)^2 + \tilde{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= lr. \end{aligned}$$

A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséggel:

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{A + \pi r^2}{2} \leq \frac{lr}{2},$$

amiből átrendezéssel kapjuk a kívánt egyenlőtlenséget.

Egyenlőség esetén a számtani és a mértani középnél a tagok között egyenlőség van, amiből $l = 2\pi r$. A Cauchy-egyenlőtlenségben egyenlőség akkor van, ha

$$\frac{x(t)}{y'(t)} = \frac{\tilde{y}(t)}{x'(t)} = \pm\frac{\sqrt{x^2(t) + \tilde{y}^2(t)}}{\sqrt{y'(t)^2 + x'(t)^2}} = \pm r.$$

Így kapjuk, hogy $x(t) = \pm r y'(t)$. Koordinátacserével kaphatjuk, hogy $y(t) = \pm r x'(t)$. Ezekből $x(t)^2 + y(t)^2 = r^2$, azaz a $c$ görbe valóban egy kör. □

# 9. Négy csúcspont tétele

**Lemma.** *Zárt természetes paraméterezésű $c\colon [0, l] \to \mathbb{R}^2, c(s) = (x(s), y(s))$ síkgörbe esetén*

$$\int_0^l \kappa'(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

$$\int_0^l x(s)\kappa'(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

$$\int_0^l y(s)\kappa'(s)\,\mathrm{d}s = 0$$

**Bizonyításvázlat.** Az első következik abból, hogy $\kappa(0) = \kappa(l)$.

A másodikhoz felhasználjuk, hogy a görbe természetes paraméterezésű, azaz $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$. Ennek a deriváltja $2x'(s)x''(s) + 2y'(s)y''(s) = 0$, amiből

$$x'(s)\kappa(s) = \sqrt{(x'(s)x''(s))^2 + (x'(s)y''(s))^2} = y''(s),$$

az előjelektől eltekintve. Meggondolható, hogy pozitív irányítású görbe esetén $x'(s)\kappa(s) = y''(s)$, negatív irányításúnál ellenkező előjelűek. Ekkor a pozitív irányítás esetén

$$\int_0^l x(s)\kappa'(s)\,\mathrm{d}s = -\int_0^l x'(s)\kappa(s)\,\mathrm{d}s = -\int_0^l y''(s) = 0.$$

A harmadikat is hasonlóan bizonyíthatjuk. □

Egy síkgörbe *csúcspontján* olyan pontot értünk, ahol a görbület deriváltja eltűnik: $\kappa'(t) = 0$. Egy zárt síkgörbét *konvexnek* nevezünk, ha minden pontjában az érintőegyenese által meghatározott egyik zárt félsíkban fekszik a görbe (képe).

**Négy csúcspont tétele.** *Egy egyszerű, zárt, konvex görbének van legalább 4 csúcspontja.*

**Bizonyításvázlat.** A bizonyításhoz feltehetjük, hogy csak véges sok csúcspont van (különben nyilvánvaló az állítás). A $\kappa$ görbület egy folytonos függvény, így van egy maximuma (legyen ez a pont a $P_1 = c(t_1)$) és egy minimuma ($P_2 = c(t_2)$), ezek a pontok csúcspontok (ha nem különböznek, akkor minden pont csúcspont lenne). Ha a görbület deriváltja csak ezeken a pontokon vált előjelet, akkor az így meghatározott íveken a görbület deriváltja pozitív, illetve negatív (esetleg egy-egy pontban 0). Jelölje $e$ a $P_1$ és a $P_2$ pontokon átmenő egyenest. Meggondolható, hogy a konvexitás miatt a görbe előbb említett ívei teljes egészében az $e$ egyik, illetve másik oldalán vannak (azaz az $e$ nem metszi másutt a görbét). Legyen az $e$ egyenes egyenlete $ax + by + c = 0$. Ekkor $(ax + by + c)\kappa'$ integrálja a görbe mentén szigorúan pozitív, ellentmondva a lemmának. Ezért a görbület deriváltja az egyik íven előjelet vált, de ekkor van egy másik előjelváltás is, azaz van még két csúcspont. □