# I. fejezet

# Görbeelmélet

## 0. Előismeretek

### Transzformációk

**0.1. Definíció.** Legyen $M$ egy tetszőleges nemüres halmaz. **Metrika** $M$-en egy olyan

$$d : M \times M \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

leképezés, amely teljesíti a következő feltételeket:

*(i)* *pozitivitás:* $\forall\, x, y \in M : \ d(x, y) = 0$, akkor és csakis akkor, ha $x = y$;

*(ii)* *szimmetria:* $\forall\, x, y \in M : \ d(x, y) = d(y, x)$;

*(iii)* *háromszög-egyenlőtlenség:* $\forall\, x, y, z \in M : \ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Ha $d$ egy metrika $M$-en, akkor az $(M, d)$ párt **metrikus tér**nek nevezzük.

**0.2. Definíció.** Legyen $(M, d)$ és $(M', d')$ metrikus tér. Egy $f : M \to M'$ leképezést **izometriá**nak mondunk, ha

*(i)* szürjektív;

*(ii)* $\forall\, x, y \in M : \ d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

*Megjegyzések.* *(ii)* implikálja, hogy minden izometria bijekció. Könnyen belátható, hogy izometriák kompozíciója, valamint izometria inverze ugyancsak izometria. Így egy metrikus tér összes izometriái csoportot alkotnak a leképezés-kompozíció műveletével. Ezt a csoportot **izometriacsoport**nak hívjuk.

**0.3. Definíció és állítás.** Legyen $V$ egy $\mathbb{R}$ test feletti vektortér és

$$GL(V) := \{\varphi \in \mathrm{End}(V) \mid \det(\varphi) \neq 0\},$$

ekkor $GL(V)$ csoport a szorzás műveletével, amelyet a $V$ vektortér **általános lineáris csoport**jának mondunk.

**0.4. Definíció és állítás.** Legyen $V$ euklideszi vektortér és

$$O(V) := \{\varphi : V \to V \mid \langle v, w \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle\},$$

ekkor $O(V)$ csoport a leképezéskompozíció műveletével. Ezt a csoportot a $V$ euklideszi vektortér **ortogonális csoport**jának nevezzük, elemeit **ortogonális transzformáció**knak mondjuk.

**0.5. Lemma.** $\det(O) = \pm 1$.

**0.6. Állítás.** $O^+(V) := \{\varphi \in O(V) \mid \det(\varphi) = 1\}$ *csoport a leképezéskompozíció műveletével.*

**0.7. Definíció.** Az $\mathbb{R}^n$ tér **transzlációján**

$$\tau_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto \tau_q(p) := p + q$$

alakú leképezést értünk, ahol $q \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, rögzített vektor.
Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezést **affin transzformáció**nak mondunk, ha előállítható egy invertálható lineáris transzformáció és egy transzláció kompozíciójaként, azaz $f = \tau_q \circ \varphi$, $q \in \mathbb{R}^n$ és $\varphi \in GL(\mathbb{R}^n)$. Ekkor $\varphi$-t az affin transzformáció **lineáris részé**nek, $\tau_q$-t pedig a **transzláció részé**nek hívjuk.
Egy affin transzformációt **irányítástartó**nak, illetve **irányításváltó**nak nevezünk aszerint, amint a lineáris része irányítástartó, illetve irányításváltó.
$\mathbb{R}^n$ euklideszi **mozgás**án olyan affin transzformációt értünk, amelynek lineáris része ortogonális transzformáció.

**0.8. Állítás.** $\mathbb{R}^n$ *egy transzformációja pontosan akkor izometria, ha előállítható egy ortogonális transzformáció és egy transzláció kompozíciójaként, így* $\mathbb{R}^n$ *izometriacsoportja egybeesik az euklideszi mozgások csoportjával.*

*Megjegyzések.* Az $\mathbb{R}^n$ **tér geometriáján** azon fogalmak és tulajdonságok összességét, amelyek megőrződnek izometriák alkalmazása esetén, vagyis az izometriacsoport invariánsainak elméletét. (Felix Klein: Erlangeni program)

## Differenciálás

**0.9. Definíció.** Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ ($U \neq \emptyset$) nyílt halmaz. Tekintsünk egy $f : U \to \mathbb{R}^m$ leképezést, továbbá legyen $p \in U$ és $U_0$ a $0 \in \mathbb{R}^n$ pont egy olyan környezete, hogy $\forall\, h \in U_0$ esetén $p + h \in U$. Azt mondjuk, hogy $f$ differenciálható $p$-ben, ha

$$\exists\, \varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : \lim_{h \to 0} \frac{\|f(p+h) - f(p) - \varphi(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Ekkor $\varphi$-t $f$ $p$-beli **derivált**jának nebezzük és $f'(p)$-vel jelöljük.
$f'(p)$-nek $\mathbb{R}^n$, illetve $\mathbb{R}^m$ kanonikus bázisai által alkotott bázispárra vonatkozó mátrixát:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1(p)}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1(p)}{\partial x^m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n(p)}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n(p)}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

$f$ $p$-beli **Jacobi mátrixá**nak nevezzük.

**0.10. Állítás.** *Ha egy leképezésnek egy pontban létezik a deriváltja, akkor az egyértelműen meghatározott.*
*Tegyük fel, hogy $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és legyenek $f, g : U \to \mathbb{R}^m$ differenciálható leképezések. Ekkor $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda f + \mu g : U \to \mathbb{R}^m$ differenciálható és $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.*
*Láncszabály: Ha $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $f : U \to \mathbb{R}^m$ és $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ differenciálható leképezés, akkor $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k$ leképezés ugyancsak differenciálható és $\forall\, p \in U$: $(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \circ f'(p)$.*

**0.11. Állítás.** *Legyen $U \subset \mathbb{R}^k$ nyílt halmaz és $f = (f^1, \ldots, f^n) : U \to \mathbb{R}^n$ leképezés. $f$ akkor és csak akkor differenciálható egy $p \in U$ pontban, ha az $f^i$ ($i = 1, \ldots, n$) koordinátafüggvények mindegyike differenciálható $p$-ben. Ekkor*

$$f'(p) = \left( {f^1}'(p), \ldots, {f^n}'(p) \right),$$

*ahol a jobb oldali lineáris leképezés a*

$$v \in \mathbb{R}^k \mapsto \left( {f^1}'(p)(v), \ldots, {f^n}'(p)(v) \right) \cong \begin{pmatrix} {f^1}'(p)(v) \\ \vdots \\ {f^n}'(p)(v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

*előírás szerint hat.*

**0.12. Definíció.** Tegyük fel, hogy $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és tekintsük az $f : U \to \mathbb{R}^m$ leképezést. Legyen $p \in U$ és $v \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Képezzük a

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$$

határértéket. Létezése esetén ezt az $f$ $p$-beli $v$ irány szerinti **iránymenti deriváltj**ának nevezzük és $D_v f(p)$-vel jelöljük. Speciálisan $D_{e_i} f(p) =: D_i f(p)$-t $p$-beli **parciális derivált**nak mondjuk.

**0.13. Állítás** (Láncszabály parciális deriváltakra)**.**
*Tegyük fel, hogy $g^1, \dots, g^n : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatók az $a \in \mathbb{R}^k$ pontban, az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pedig differenciálható a $b = \left(g^1(a), \dots, g^n(a)\right) \in \mathbb{R}^n$ pontban. Ha $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $p \mapsto F(p) := f\left(g^1(p), \dots, g^n(p)\right)$, akkor léteznek $F$ $a$-beli parciális deriváltjai és a*

$$D_i F(a) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(b) D_i g^j(a) \qquad (1 \leq i \leq k)$$

*formula alapján számíthatók ki.*

**0.14. Definíció.** Tegyük fel, hogy $f$ differenciálható az $U \subset \mathbb{R}^n$ (nemüres) nyílt halmaz fölött. Azt mondjuk, hogy $f$ egy $p \in U$ pontban

*(i)* **immerzió**, ha $f'(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ injektív;

*(ii)* **szubmerzió**, ha $f'(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ szürjektív;

*(iii)* **reguláris**, ha immerzió és szubmerzió;

*(iv)* **diffeomorfizmus**, ha $f : U \to V \subset \mathbb{R}^m$ olyan differenciálható bijekció, amelynek az $f^{-1} : V \to U$ inverz leképezése is differenciálható.

**0.15. Állítás** (Inverz leképezés tétel)**.**
*Legyen $W \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és tegyük fel, hogy $f : W \to \mathbb{R}^n$ differenciálható leképezés. Ha $a \in W$ és $f$ reguláris $a$-ban, akkor létezik az $a$ pontnak $U \subset W$, az $f(a)$ pontnak pedig $V$ környezete úgy, hogy az $f|_U : U \to V$ leképezés diffeomorfizmus. Ha $p \in U$ és $q := f(p)$, akkor az $f^{-1}$ inverz $q$-beli deriváltját az $\left(f^{-1}\right)'(q) = [f'(p)]^{-1}$ formula adja.*

# 1. Parametrizált görbék; Ívhossz

**1.1. Definíció.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ egy nem feltétlenül korlátos intervallum.

(i) Egy $c : I \mapsto \mathbb{R}^2$ immerziót **parametrizált görbének** nevezünk. A $t \in I$ valós számokat ilyenkor **paraméterként** is említjük, adott $t \in I$ esetén $c(t)$-t a görbe $t$ paraméterű pontjának mondjuk. Ha $\operatorname{Im} c - t$ $\mathbb{R}^3$ egy kétdimenziós lineáris sokasága tartalmazza, akkor **parametrizált síkgörbéről beszélünk.**

(ii) Tekintsük a $c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ parametrizált görbét!

$\alpha$) $c$ **érintőegyenes**e a $t$ paraméterű pontban a $c(t) + \alpha(c'(t))$ egydimenziós lineáris sokaság.

$\beta$) $c$ **bireguláris**, ha:

$$\forall t \in I : \quad (c'(t), c''(t)) \text{ lineárisan független;}$$

ebben az esetben a $c(t)+\alpha(c'(t), c''(t))$ kétdimenziós lineáris sokaságot a görbe $c(t)$ pontbeli **simulósík**jának mondjuk.

$\gamma$) $c$ pályasebessége a

$$v : I \mapsto \mathbb{R}, \quad t \mapsto v(t) := \|c'(t)\|$$

függvény, ha ez az **1** értékű konstans függvény, akkor $c$-t **egységpályasebességű**nek vagy **természetes paraméterezésű**nek nevezzük.

$\delta$) $c$ **ívhossza** a pályasebesség $I$ fölötti integrálja

$$L(c) := \int_I v = \int_I \|c'\|;$$

**ívhosszfüggvénye** az

$$\varsigma : \quad I \mapsto [0, L(c)]\,, \quad t \mapsto \varsigma(t) := \int_a^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

függvény, ahol $a \in I$ rögzített.

(iii) A $c : I \mapsto \mathbb{R}^2$ és $\tilde{c} : I \mapsto \mathbb{R}^3$ parametrizált görbéket **kongruensek**nek nevezzük, ha $\exists$ olyan $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ izometria, hogy $\tilde{c} = f \circ c$. Amennyiben a szóban forgó izometria transzláció, úgy **paralel görbék**ről szólunk.

(iv) Azt mondjuk, hogy a $\tilde{c} : \tilde{I} \mapsto \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe **ekvivalens** a $c : : I \mapsto \mathbb{R}^3$ parametrizált görbével, ha megadható olyan $\Theta : \tilde{I} \mapsto I$ diffeomorfizmus, amelyre $\tilde{c} = c \circ \Theta$ teljesül. Ekkor a $\Theta$ függvényt **paramétertranszformáció**nak hívjuk és a $\tilde{c}$ parametrizált görbét $c$ $\Theta$ általi átparaméterezettjeként említjük. A $\Theta$ paramétertranszformáció **irányítástartó** ill. **irányításváló t** aszerint, hogy:

$$\forall \tilde{t} \in \tilde{I} : \quad \Theta'(\tilde{t}) > 0 \quad \text{ill.} \quad \Theta(\tilde{t}) < 0$$

*Megjegyzések.* Az értelmezés szerint egy parametrizált görbe nem ponthalmaz, hanem leképezés
A parametrizált görbék halmazán bevezetett kongruencia és ekvivalencia egyaránt ekvivalenciareláció. Nyilvánvaló, hogy az egymástól paramétertranszformációban különböző parametrizált görbék képtere azonos.
Megfordítva: egy adott $\mathbb{R}^3$-beli ponthalmaznak lehetnek nem ekvivalens paraméterezései.
Például:

$$!S^1 := \left\{ r \in \mathbb{R}^2 \quad | \quad \|r\| = 1 \right\}$$
$$c_1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto c_1(t) := (\cos t, \sin t)$$
$$c_2 : ]-\pi, 3\pi[ \mapsto \mathbb{R}^2 \quad t \mapsto c_2(t) := (\cos t, \sin t)$$

$c_1$ és $c_2$ immerzió, $\operatorname{Im} c_1 = \operatorname{Im} c_2$, de $c_1$ és $c_2$ nem ekvivalens, mivel pl. a $c_1^{-1}(1{,}0)$ és $c_2^{-1}(1{,}0)$ ősképek különböző számosságúak.

**1.2. Állítás.**

*(i) Parametrizált görbe átparaméterezettje parametrizált görbe. Az átparaméterezés során a biregularitás megőrződik.*

*(ii) A parametrizált görbék érintőegyenese és – biereguláris esetben – a simulósíkja paramétertranszformációval szemben invariáns.*

*(iii) A parametrizált görbék érintőegyenese, biregularitása és simulósíkja affin transzformációval szemben invariáns.*

*Bizonyítás.* $!\, c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe.

(i) Ha $\Theta : \tilde{I} \mapsto I$ paramétertranszformáció és $\tilde{c} := c \circ \Theta$, akkor a **(0.10)** láncszabályt alkalmazva:

$$\tilde{c}' = (c' \circ \Theta)\Theta'$$
$$\tilde{c}'' = (c'' \circ \Theta)(\Theta')^2 + (c' \circ \Theta)\Theta'' \quad (*)$$

Mivel $\Theta$ diffeomorfizmus $\Rightarrow$ $\Theta'$ sehol sem tűnik el $\Rightarrow$ $\tau$ immerzió.

**Biregularitás megőrzése (indirekt):** Tegyük fel hogy $c$ bireguláris, de $\tilde{c}$ nem az, vagyis $\exists \tilde{t} \in \tilde{I} \quad : \quad \tilde{c}''(\tilde{t}) = \lambda\, \tilde{c}'(\tilde{t})$. Ekkor

$$(c'' \circ \Theta)(\tilde{t}) \left[\Theta'(\tilde{t})\right]^2 + (c' \circ \Theta)(\tilde{t})\Theta''(\tilde{t}) = \lambda(\tilde{c}' \circ \Theta)(t)\Theta'(t) \quad \Rightarrow$$
$$(c' \circ \Theta)(\tilde{t}) \left[\tilde{\Theta}''(\tilde{t}) - \lambda\Theta'(\tilde{t})\right] + (c'' \circ \Theta)(\tilde{t}) \left[\Theta'(\tilde{t})\right]^2 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

teljesülne.
Mivel $c'(\tilde{t})$ és $c''(\tilde{t})$ lineárisan független $\Rightarrow$ $\Theta'(\tilde{t}) = 0$, ami ellentmondás.

(ii) $\tilde{c}$ érintőegyenese egy $\tilde{t}$ paraméterű pontban:

$$\tilde{c}(\tilde{}) + \alpha(\tilde{c}(t)) \stackrel{(i)}{=} \tilde{c}(\tilde{t}) + \alpha(\Theta'(t)c'(\Theta(t))) = c(\Theta(\tilde{t})) + \alpha(c'(\Theta(\tilde{t}))$$

ami $c$ érintőegyenese a $\Theta(\tilde{t})$ paraméterű pontban.

Simulósík megőrzése:

$$(*) \quad \Rightarrow \forall \tilde{t} \in \tilde{I} \quad : \quad \alpha(\tilde{c}'(\tilde{t}), \tilde{c}''(\tilde{t})) = \alpha(c'(\Theta(\tilde{t})), c''(\Theta(\tilde{t}))),$$

ezért $\tilde{c}$ simulósíkja a $\tilde{t}$ paraméterű pontban

$$\tilde{c}(\tilde{t}) + \alpha(\tilde{c}'(\tilde{t}), \tilde{c}''(\tilde{t})) = c(\Theta(\tilde{t})) + \alpha(c'(\Theta(\tilde{t})), c''(\Theta(\tilde{t})))$$

ami $c$ simulósíkja a $\Theta(\tilde{t})$ paraméterű pontban.

(iii) Belátandó, hogy ha $c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe és $f = \tau_a \circ \varphi$ affin transzformáció, akkor:

$f \circ c$ parametrizált görbe;
$f \circ c$ bireguláris, ha $c$ az.

$$\forall t \in I : (f \circ c)(t) = f'(c(t)) \cdot c'(t) = \varphi(c'(t))$$ [1]

és $\varphi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ izomorfizmus $\Rightarrow$ állítás.

**1.3. Állítás.** *Parametrizált görbék ívhossza izometriával és irányítástartó paramétertranszformációval szemben invariáns.*

*Bizonyítás.* $! c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe.
Tekintsük az $f = \tau_a \circ \varphi \quad , \quad \varphi \in O(\mathbb{R}^3)$ izometriát.

$$\forall t \in I : \|(f \circ c)'(t)\| = \|f'(c(t))c'(t)\| = \|\varphi(c'(t))\| = \|c'(t)\| \qquad {}^{2}$$
$$L(f \circ c) := \int_I \|(f \circ c)'\| = \int_I \|c'\| =: L(c)$$

$! \quad \Theta : \tilde{I} \mapsto I$ irányítástartó pamatétertranszformáció! Ekkor

$$\forall \tilde{t} \in \tilde{I} : \Theta'(\tilde{t}) > 0$$
$$L(\tilde{c}) = L(c \circ \Theta) = \int_I \|\tilde{c}\| = \int_I \|(c' \circ \Theta)\Theta'\| = \int_I \|c' \circ \Theta\|\Theta' =: L(c) \qquad {}^{3}$$

**1.4. Állítás.** *Minden parametrizált görbe ekvivalens egy természetes paraméterezésű görbével. Nevezetesen:*
*ha $c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe és ívhosszfüggvénye $\varsigma$, akkor $\tilde{c} := c \circ \varsigma^{-1} \quad \exists$ és c-vel ekvivalens természetes paraméterezésű görbe.*
*Amennyiben $c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ természetes paraméterezésű görbe, úgy bármely vele ekvivalens természetes paraméterezésű görbe.*

$$t \mapsto c(t + \alpha) \quad \textit{vagy} \quad s \mapsto c(-s + \alpha)$$

*alakú, ahol $\alpha \in R$*

*Bizonyítás.* Házi feladat

# 2. Görbület, torzió; Frenet-apparátus

**2.1. Definíció.** Legyen $c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ ívhoszparaméterezésű görbe.
A $\kappa : I \mapsto \mathbb{R} \quad s \mapsto \kappa(s) = \|c''(s)\|$ függvényt a $c$ görbéhez tartozó görbületfüggvénynek mondjuk.

[1] Affin transzformáció tetszőleges pontban vett deriváltja a lineáris részével egyezik meg.
[2] $\varphi$ normatartó
[3] Helyettesítéses integrálás

**2.2. Lemma.** *Ívhosszparaméterezéssel ekvivalens paraméterezést használva a $t \in I$ paraméterezést használva a $t \in I$ paraméterű pontbeli görbület értéke*

$$\kappa(t) = \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}$$

*formula alapján számítható.*

*Bizonyítás.* Gyakorlat

**Következmény.** *Egy $c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe pontosan akkor bireguláris, ha a görbületfüggvénye sehol sem tűnik el (ennélfogva mndenütt pozitív értéket vesz fel).*
*Egy $c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ parametrizált görbe $\Leftrightarrow$ parametrizált egyenes, ha görbületfüggv énye a zérus függvény.*

**2.3. Állítás.** *Tekintsünk egy $c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ parametrizált görbét, melynek görbületfüggvénye a $\kappa : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény.*

*(i) Ha $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ izometria, akkor $f \circ c$ görbületfüggvénye szintén $\kappa$, a görbület tehát izometriával szemben invariáns.*

*(ii) Amennyiben $\Theta : J \mapsto I$ paramétertranszformáció, $\tilde{c} = c \circ \Theta$ és $\tilde{c}$ görbületfüggvénye $\tilde{\kappa}$, úgy*

$$\tilde{\kappa} = \kappa \circ \Theta$$

*azaz a görbület paramétertranszformációval szemben is invariáns.*

*Bizonyítás.*

(i) ! $\tilde{c} := f \circ c$, ha $f = \tau_a \circ \varphi$ :

$$\tilde{c}' = (f' \circ c)c' = \varphi \circ c'$$
$$\tilde{c}'' = (\varphi' \circ c')c'' = \varphi \circ c''$$

$$\tilde{\kappa} = \frac{\|\tilde{c}' \times \tilde{c}''\|}{\|\tilde{c}'\|^3} = \frac{\|\varphi \circ c' \times \varphi \circ c''\|}{\|\varphi \circ c'\|^3} = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} = \kappa$$

(ii)

$$\tilde{c} = c \circ \Theta$$
$$\tilde{c}' = (c' \circ \Theta)\Theta'$$
$$\tilde{c}'' = (c'' \circ \Theta)(\Theta')^2 + (c' \circ \Theta)\Theta''$$

$$\tilde{\kappa} = \frac{\|\tilde{c}' \times \tilde{c}''\|}{\|\tilde{c}'\|^3} = \frac{\|(c' \circ \Theta)\Theta' \times (c'' \circ \Theta)(\Theta')^2\|}{\|(c' \circ \Theta)\Theta'\|^2} = \frac{\|(c' \circ \Theta) \times (c'' \circ \Theta)\|}{\|c' \circ \Theta\|^3} = \kappa \circ \Theta$$

**2.4. Definíció.** Legyen $c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ ívhosszparaméterezésű bireguláris görbe. Az

$$n(s) := \frac{c''(s)}{\kappa(s)}$$

$c''(s)$ irányú egységvektort a $c(s)$ pontbeli **főnormálvektor**nak nevezzük.
Mivel

$$< c'(s), c'(s) >= \underline{1} \quad \Rightarrow \quad < c''(s), c'(s) >= 0$$

így $n(s) \perp c'(s)$

A $t(s) := c'(s)$ egységvektor neve: **érintővektor**.

$$\left.\begin{array}{l} t(s) = c'(s) \\ c''(s) = \kappa(s)\, n(s) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \boxed{t'(s) = \kappa(s) n(s)}$$

**2.5. Definíció.** A simulósík $b(s) := t(s) \times n(s)$ normálvektorát **binormális** vektornak hívjuk.
A $(t, n, b)$ hármast a tekintett görbe **Frenet-féle háromméljének** mondjuk.

*Megjegyzések.* $t$ és $n$ vektorok definíciójából közvetlenül adódik, hogy $\forall s \in I$ esetén $t(s)$ és $n(s)$ a $c(s)$-beli simulósíkot feszíti ki.
Az $n(s)$ és $b(s)$ által kifeszített síkot a $c(s)$-beli **normálsík**nak, a $b(s)$ és $t(s)$ által kifeszített síkot pedig a $c(s)$-beli **rektifikáló sík**nak nevezzük.

**2.6. Állítás.** *Tekintsük a $C : I \mapsto \mathbb{R}^3$ bireguláris ívhosszparaméterezésű görbét, amelynek Frenet-féle hároméle $(t, n, b)$.*

*i) Ha $\tilde{c} := f \circ c$, ahol $f = \tau_a \circ \varphi \quad (a \in \mathbb{R}^3, \varphi \in O(\mathbb{R}^3))$ izometria, akkor $\tau$ Frenet-féle hároméle*

$$\tilde{t} = \varphi \circ t$$
$$\tilde{n} = \varphi \circ n$$
$$\tilde{b} = \varepsilon(\varphi \circ b)$$

*ahol $\varepsilon := \det \varphi \in \{-1,1\}$.*

*ii) Tegyük fel hogy $\Theta : \tilde{I} \mapsto I$ paramétertranszformáció, s legyen $\tilde{c} := c \circ \Theta$. Ebben az esetben $\tilde{c}$ Frenet-féle hároméle*

$$\tilde{t} = \varepsilon(t \circ \Theta)$$
$$\tilde{n} = n \circ \Theta$$
$$\tilde{b} = \varepsilon(b \circ \Theta)$$

*ahol $\varepsilon$ vagy 1 vagy $-1$, aszerint, amint $\Theta$ irányítástartó, illetve irányításváltó paramétertranszformáció.*

*Bizonyítás.*

i)

$$\tilde{t} = \tilde{c}' = \varphi \circ c' = \varphi \circ t$$
$$\tilde{n} = \frac{\tilde{t}'}{\tilde{\kappa}} \overset{2.3}{=} \frac{(\varphi \circ t)'}{\kappa} = \frac{\varphi \circ t'}{\kappa} = \varphi \circ n$$

Jegyezzük meg, hogy $\forall \varphi \in End\, \mathbb{R}^3$ és $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ :

$$< \varphi(a) \times \varphi(b), \varphi(c) >= \det \varphi < a \times b, c > .$$

$$\det \varphi < a \times b, c > \overset{\varphi \in O(\mathbb{R}^2)}{=} \det \varphi < \varphi(a \times b), \varphi(c) >=< \det \varphi \cdot \varphi(a \times b), \varphi(c) >$$

Ennek alapján adódik, hogy

$$\tilde{b} = \tilde{t} \times \tilde{n} = (\varphi \circ t) \times (\varphi \circ n) = \varepsilon(\varphi_0(t \times n)) = \varepsilon(\varphi \circ b)$$

ii)

$$\tilde{t} = \tilde{c}' = (c \circ \Theta)' = \Theta'(c' \circ \Theta) = \varepsilon(t \circ \Theta)$$
$$\tilde{n} = \frac{\tilde{t}'}{\tilde{\kappa}} \overset{2.3}{=} \frac{\varepsilon(t \circ \Theta)'}{\kappa \circ \Theta} = \frac{\varepsilon^2(t' \circ \Theta)}{\kappa \circ \Theta} = n \circ \Theta$$
$$\tilde{b} = \tilde{t} \times \tilde{n} = \varepsilon(t \circ \Theta) \times (n \circ \Theta) = \varepsilon(t \times n) \circ \Theta = \varepsilon(b \circ \Theta)$$

Mivel $b(s) = t(s) \times n(s)$, így

$$b'(s) = \underbrace{t'(s) \times n(s)}_{=0 \Leftarrow t'(s) \| n(s)} + t(s) \times n'(s) = t(0) \times n'(s) \Rightarrow b'(s) \perp t(s)$$

Másrészt, mivel $b(s)$ egységvektor $\quad \Rightarrow \quad b'(s) \perp b(s)$.
Továbbá $t(s) \perp b(s)$, így $b'(s) \parallel n(s)$ adódik : $b'(s) = -\tau(s)n(s)$.

**2.7. Definíció.** Legyen $c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ ívhosszparaméterezésű bireguláris görbe. Ekkor a $b'(s) = -\tau(s)n(s)$ összefüggés által definiált $\tau : I \mapsto \mathbb{R}$ függvényt **torziófüggvény**nek nevezzük.

**2.8. Állítás.** *A torziófüggvény irányítástartó izometriával és tetszőleges paramétertranszformációval szemben invariáns, irányításváltó izometria alkalmazása esetén előjelet vált.*

*Bizonyítás.* Legyen adva a $c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ bireguláris ívhosszparaméterezésű görbe!

i) Tekintsük az $f = \tilde{c}_a \circ \varphi \quad (a \in \mathbb{R}^3, \varphi \in O(\mathbb{R}^3))$ izometriát és legyen $\tilde{c} := f \circ c$
$\tilde{b}' \overset{2.6}{=} (\varepsilon(\varphi \circ b))' = \varepsilon\varphi \circ b' = \varepsilon\varphi \circ (-\tau n) = -\varepsilon\tau(\varphi \circ n) \overset{2.6}{=} -\varepsilon\tau\tilde{n}$ következik,
hogy $\tilde{\tau} := \varepsilon\tau = \begin{cases} \tau & \text{,ha } f \text{ irányítástartó} \\ -\tau & \text{,ha } f \text{ irányításváltó} \end{cases}$

ii) Legyen $\Theta : \tilde{I} \mapsto I$ paramétertranszformáció, $\tilde{c} := c \circ \Theta$. Ekkor

$$(\tilde{b})' \overset{2.6}{=} (\varepsilon(b \circ \Theta))' = \varepsilon\Theta'(b' \circ \Theta) = \varepsilon^2((-\tau n) \circ \Theta) = -(\tau \circ \Theta)(n \circ \Theta) = -(\tau \circ \Theta)\tilde{n} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \tilde{\tau} = \tau \circ \Theta$$

Tekintsük egy $c$ ívhosszparaméterezésű görbe $s \in I$ pontbeli Frenet-féle háromélét! Már ismert, hogy $t'(s) = \kappa(s)n(s)$ és $b'(s) = -\tau(s)n(s)$.
Vizsgáljuk $n'(s)$-t!

$$n'(s) = (b(s) \times t(s))' = b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s) =$$
$$= -\tau(s)n(s) \times t(s) + b(s) \times \kappa(s)n(s) = \tau(s)b(s) - \kappa(s)t(s)$$

azaz $\boxed{n'(s) = -\kappa(s)t(s) + \tau(s)b(s)}$

A Frenet-féle háromél derivált vektorainak $(t, n, b)$ ortonormált bázisban való

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (F1) | $t'(s) =$ | | $\kappa(s)n(s)$ | |
| (F2) | $n'(s) =$ | $-\kappa(s)t(s)$ | | $+\tau(s)b(s)$ |
| (F3) | $b'(s) =$ | | $-\tau(s)n(s)$ | |

előállítását **Frenet-formulák**nak nevezzük.

*Megjegyzések.* Az (F1)-(F3) összefüggéseket Serret-Frenet-formulákként is szokás idézni, ugyanis egymástól függetlenül jutott el hozzájuk Serret(1819-1885) 1851-ben, illetve Frenet(1816-1900) az 1847-ben elkészült disszertációjában. Az utóbbinak egy kivonata 1852-ben került publikálásra. Az (F1)-(F3) egyenletek teszik lehetővé a görbeelméleti problémák szisztematikus vizsgálatát, korábban csak ad-hoc módszerekkel tették azt meg.

**2.9. Állítás.** *Tekintsünk egy $c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbét! Ekkor a Frenet-formulák az alábbi formát öltik:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $t'(t) =$ | | $v(t)\kappa(t)n(t)$ | |
| $n'(t) =$ | $-v(t)\kappa(t)t$ | | $+v(t)\tau(t)b(t)$ |
| $b'(t) =$ | | $-v(t)\tau(t)n(t)$ | |

**2.10. Állítás.** *Egy $c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbe Frenet-féle háromméle a következő összefüggések szerint számítható:*

$$t = \frac{c'}{\|c'\|} \quad , \quad b = \frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|} \quad , \quad n = b \times t$$

*torziófüggvényét pedig a*

$$\tau = \frac{< c' \times c'', c''' >}{\|c' \times c''\|^2} \quad \textit{formula szolgáltatja}$$

*Bizonyítás.*

i) Ha $c$ tetszőleges paraméterezésű bireguláris görbe, akkor érintő egységvektora

$$t = \frac{c'}{\|c'\|} = \frac{c'}{v}.$$

$$c' \times c'' = c' \times (v't + vt') = vt \times vt' \overset{2.9}{=} vt \times v^2\kappa n = v^3\kappa(t \times n) = v^3\kappa b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{c' \times c''}{\|c'\|^3\kappa} \underset{\kappa = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^2}}{\overset{}{\underset{\uparrow}{=}}} \frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|}$$

Mivel $(t, n, b)$ pozitív ortonormált bázis kell hogy legyen, így $(b, t, n)$ hármas is az. Továbbá $(b, t, b \times t)$ szintén pozitív ortonormált bázis, így $n = b \times t$

ii) A $c'''$ a $(t, n, b)$ bázisban egyértelműen felírható:

$$c''' = \lambda t + \mu n + \nu b \qquad \lambda, \mu, \nu \in C^\infty(I)$$

Mivel $c' \times c'' = v^2\kappa b$ , továbbá $< t, b >=< n, b >= 0$, így a $< c' \times c'', c''' >$ vegyes szorzat kiszámításához elegendő a $\nu$ függvény ismerete.

$c' = vt$

$c'' = v't + vt' = v't + v^2\kappa n$

$c''' = v''t + v't' + (v^2\kappa)'n + v^2\kappa n' = v''t + v'v\kappa n + (v^2\kappa)'n + v^2\kappa(-v\kappa t + v\tau b) =$

$= (v'' - v^3\kappa^2)t + (v'v + (v^2\kappa)')n + v^3\kappa\tau b,$

így $\quad c' \times c'' = v^3\kappa b$-t felhasználva

$$< c' \times c'', c''' >= v^6\kappa^2\tau$$

$$\text{Másrészt } \kappa^2 = \frac{\|c' \times c''\|^2}{\|c'\|^6} = \frac{\|c' \times c''\|^2}{v^6}, \text{ így}$$

$$\tau = \frac{< c' \times c'', c''' >}{\|c' \times c''\|^2} \quad \text{adódik.}$$

Ha a görbe ívhosszparaméterezésű, akkor

$$\|c' \times c''\|^2 = \|c'\|^2 \|c''\|^2 - < c', c'' >^2 = \|c''\|^2 = \kappa^2,$$

ekkor tehát

$$\tau \frac{< c' \times c'', c''' >}{\kappa^2}$$

**2.11. Állítás.** *Egy $c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ bireguláris parametrizált görbe $\Leftrightarrow$ síkgörbe, ha torziófüggvénye a zérus függvény, vagyis a torzió eltűnése a parametrizált síkgörbéket jellemzi.*

*Bizonyítás.* Könnyű gyakorló feladat.

**2.12. Definíció.** Tekintsünk egy $c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ parametrizált görbét. Tetszőleges $t \in I$ paraméter esetén a

$$c^*(t) = c(t) + \frac{1}{\kappa(t)} n(t)$$

pontot a $c$ görbe $t$ paraméterezésű pontjához tartozó **görbületi középpont**nak, a $c^*(t)$ középpontú, $\rho(t) := \frac{1}{\kappa(t)}$ sugarú és a $c(t)$-beli simulósíkra illeszkedő kört az adott görbe $c(t)$ pontbeli **simulókör**ének mondjuk, $\rho(t)$-re a **görbületi sugár** elnevezést használjuk. Speciálisan egy bireguláris síkgörbe görbületi középpontjai által meghatározott görbét a görbe **evolutá**jának hívjuk. Egy tetszőleges bireguláris görbe **evolvens**én érintőinek ortogonális trajektóriáját értjük.

**2.13. TÉTEL.** ***(Görbeelmélet alaptétele)***

***(Unicitás-tétel)*** *: Tegyük fel hogy $c_1 : I \mapsto \mathbb{R}^3$ és $c_2 : I \mapsto \mathbb{R}^3$ természetes paraméterezésű bireguláris parametrizált görbe, amelyeknek görbület-, és torziófüggvénye megegyezik.*
*Ekkor létezik olyan irányítástartó izometria, amely a görbék egyikét a másikba viszi át, következésképpen a görbület-, és a torziófüggvény irányítástartó izometriától eltekintve egyértelműen meghatározza az $\mathbb{R}^3$-beli parametrizált görbéket.*

***(Egzisztencia-tétel)*** *: Tetszőlegesen adott $\kappa : I \mapsto \mathbb{R}$ pozitív értékű differenciálható és $\tau : I \mapsto \mathbb{R}$ differenciálható függvényekhez $\exists$ olyan $c : I \mapsto \mathbb{R}^3$ természetes paraméterezésű – szükségképpen bireguláris – parametrizált görbe, amelynem görbület-, és torziófüggvénye a megadott $\kappa$ illetve $\tau$ függvény.*