F1. Határozza meg $f'(x)$-et, ha

(a) $f(x) := \dfrac{(x+1)^3}{x^{3/2}}$; (b) $f(x) := \dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$;

(c) $f(x) := \big(\sin^3 x\big) \cdot \cos x$; (d) $f(x) := \ln\big(\cos x\big)$;

(e) $f(x) := \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$; (f) $f(x) := \ln\left(\dfrac{e^x}{1+e^x}\right)$;

(g) $f(x) := 3^{x^2}$; (h) $f(x) := e^{4x+3}$;

(i) $f(x) := \sin\sqrt{1-2^x}$; (j) $f(x) := \ln\left(\dfrac{1}{x} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$;

(k) $f(x) := \ln\big(e^{-x}\sin x\big)$; (l) $f(x) := \sqrt{1+\sin^2 x} \cdot \cos x$.

F2. Határozza meg az alábbi függvények deriváltját:

(a) $f(x) := 2^x \cdot \sin x \cdot \log_3 x, \quad x \in \big(0, \frac{\pi}{4}\big)$;

(b) $f(x) := \dfrac{1}{x} \cdot \cos\left(\dfrac{2+x}{2^x}\right), \quad x \in \big(0, \frac{1}{10^2}\big)$;

(c) $f(x) := \big(\sin x\big)^x, \quad x \in \big(0, \frac{\pi}{4}\big)$;

F3. Írja fel az

$$f(x) := \frac{\cos\sqrt{x^2+1}}{x+2} \qquad (x > -2)$$

függvény grafikonjának az $x_0 = 0$ ponthoz tartozó érintőegyenesének az egyenletét.

F4. Számítsa ki az

$$f(x) := \frac{\ln\sqrt{1+x}}{\big(x^2+1\big)^4} \qquad (x > -1)$$

függvény deriváltját. Írja fel a függvény grafikonjának az $x_0 = 0$ ponthoz tartozó érintőegyenesének az egyenletét.

F5. Számítsa ki az

$$f(x) := \ln\frac{(x^2+1)^5}{\sqrt{1-x}} \qquad (x < 1)$$

függvény deriváltját. (Alkalmazza először a logaritmusra vonatkozó azonosságokat.)

Írja fel a függvény grafikonjának az $x_0 := 0$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét.

F6. Határozza meg az alábbi magasabbrendű deriváltakat:

(a) $f(x) := x^2 \ln x \quad (x \in \mathbb{R}^+), \quad f^{(2)}(x) = ?$;

(b) $f(x) := \dfrac{1}{\sin x} \quad (x \in (0, \pi)), \quad f^{(3)}(x) = ?$.

F7. Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken az f függvény szigorúan monoton:

(a) $f(x) := x^2(x-3) \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := xe^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x) := x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

F8. Határozza meg az alábbi függvények **lokális** szélsőértékeit és szélsőértékhelyeit (alkalmazza az elsőrendű *szükséges* feltételt és az elsőredű – vagy a másodrendű – *elégséges* feltételt):

(a) $f(x) := x^2(x-3) \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := xe^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x) := x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

F9. Adja meg azokat az intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

(a) $f(x) := 1 - (x+1)^3 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := x^5 - 5x^4 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x) := x + \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$.

F10. Van-e az alábbi f függvénynek aszimptotája $+\infty$-ben, illetve $-\infty$-ben? Ha igen, akkor határozza meg.

(a) $f(x) := \dfrac{x^2}{(x-1)^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$;

(b) $f(x) := x^4 + x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x) := x \ln |x| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$;

(d) $f(x) := x - 2 \operatorname{arctg} x \quad (x \in \mathbb{R})$.

F11. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsa ki az alábbi határértékeket! (Minden egyes esetben állapítsa meg, hogy milyen típusú „kritikus" határértékről van szó!)

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; (b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{3x}}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} \quad (a > 0)$;

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{1/x} - x$;

(f) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 e^{-x}$;

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x} \ln x$.

(h) $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln x \cdot \ln(1-x)$.

F12. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken, és vázolja a grafikonjukat:

(a) $f(x) := 2 - 2x^2 - x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \dfrac{1}{x(x-3)^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\})$,

(c) $f(x) := \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\})$,

(d) $f(x) := \dfrac{x^2 + 9}{x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,

(e) $f(x) := \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\})$,

(f) $f(x) := e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$ (az ún. *Gauss-görbe*),

(g) $f(x) := \dfrac{1 + x^2}{e^{x^2}} \qquad (x \in \mathbb{R})$,

(h) $f(x) := \ln(x^2 - 1) \qquad (|x| > 1)$,

(i) $f(x) := \dfrac{\ln x}{x} \qquad (x > 0)$.