

3. vizsga

1. Mikor nevezünk egy függvényt monoton csökkenőnek? (3 pont)
2. Definiáljuk azt a fogalmat, melyre a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ jelölést ($A \in \mathbb{R}$) használjuk. (3 pont)
3. Mondjuk ki a Weierstrass-tételt! (3 pont)
4. Egészítsük ki a következő definíciót! (3 pont)
Egy $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvény ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) _____, ha az értékkészletének minden elemét egyszer veszi fel, azaz $f(x_1) = f(x_2)$ esetén $x_1 = x_2$.
5. Melyik a helyes befejezés? (3 pont)
Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) az $x_0 \in D_f$ pontban lokális minimuma van, ha
 - (a) minden $x \in D_f$ esetén $f(x_0) \geq f(x)$.
 - (b) minden $x \in D_f$ esetén $f(x_0) \leq f(x)$.
 - (c) van olyan $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $f(x_0) \geq f(x)$.
 - (d) van olyan $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $f(x_0) \leq f(x)$.
6. Keressük meg a szakadási helyeket, és azok fajtáit! (6 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}, & \text{ha } x \neq 2, \\ 0, & \text{ha } x = 2. \end{cases}$$

7. Peti karácsonyra készülve fenyőfát vesz. Az x méter magas fa ára $3000x$ forint. Peti számára egy x méter magas fa értéke $4x^2 - x^3$. Milyen magas a számára legjobb ár-érték arányú fa (tehát aminek az egy forintra jutó értéke a lehető legmagasabb)? (7 pont)
8. Végezzük el az $f(x) = e^{x^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát (értelmezési tartomány, zérushely, paritás, periodicitás, határértékek, aszimptoták, monotonitás, lokális szélsőértékek, konvexitás, ábrázolás, értékkészlet). (12 pont)
9. Melyik az az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, amelyre $f''(x) = \sin(3x)$, továbbá $f'(0) = 1$ és $f(0) = 2$ teljesül? (7 pont)
10. (7 pont)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{(\cos x)^2} dx = ?$$
11. Mennyi az $f(x) = \frac{2(x-1)^{3/2}}{3}$ függvény ($x \in [2, 4]$) grafikonjának ívhossza? (6 pont)