3. vizsga végeredményei

4. felülről korlátos

5. (d)

6. $\sqrt{3-x^2}$ miatt $3-x^2 \geq 0$, azaz $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$.
   $\ln(6x-3)$ miatt $6x-3>0$, azaz $\frac{1}{2}<x$.
   Továbbá (az osztás miatt) $\ln(6x-3) \neq 0$, azaz $6x-3 \neq 1$, azaz $x \neq \frac{2}{3}$.
   Tehát az értelmezési tartomány $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right] \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

7. A függvény: $f(x) = \dfrac{50 \cdot 6x}{4+x^2}$, melynek deriváltja $f'(x) = 300\dfrac{1\cdot(4+x^2)-x\cdot 2x}{(4+x^2)^2} = 300\dfrac{4-x^2}{(4+x^2)^2}$, mely $x=\pm 2$-ben tűnik el, amik közül csak az $x=2$ értelmes. Ez maximum, hiszen $f'(x)$ előtte pozitív, utána negatív.

8. ÉT: $\mathbb{R}$, zérushely: $x=0$, paritás, periódus nincsen.

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, és itt nincs ferde aszimptota.

   $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^{3x}} \rightsquigarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{3e^{3x}} = 0$, tehát az $y=0$ vízszintes aszimptota.

   $f'(x) = (1-3x)e^{-3x}$ így $\dfrac{1}{3}$-ig monoton nő, utána monoton csökken.

   $f''(x) = (-3+(1-3x)(-3))e^{-3x} = (9x-6)e^{-3x}$, így $\dfrac{2}{3}$-ig konkáv, utána konvex.

   ÉK: $\left(-\infty, \frac{1}{3e}\right]$.

9. $f'(x) = -\frac{1}{x} + C_1$, ahol $C_1 = \frac{3}{2}$. Így $f(x) = -\ln(x) + \frac{3}{2}x + C_2$, ahol $C_2 = \frac{1}{2}$, tehát $f(x) = -\ln(x) + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.

10. Parciális integrálással:

$$\int xe^{-3x}\,\mathrm{d}x = x\frac{e^{-3x}}{-3} - \int 1\frac{e^{-3x}}{-3}\,\mathrm{d}x = -x\frac{e^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9} + C,$$

amiből:

$$\int_0^1 xe^{-3x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\frac{e^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9}\right]_0^1 = -\frac{e^{-3}}{3} - \frac{e^{-3}}{9} - \left(0 - \frac{1}{9}\right) = \frac{1-4e^{-3}}{9} \approx 0,089.$$

11. A forgásfelület palástfelszíne:

$$2\pi \int_0^2 x^3\sqrt{1+(3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{36}\int_0^2 36x^3\sqrt{1+9x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{18}\left[\frac{2}{3}(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{\pi}{27}\left(145^{\frac{3}{2}} - 1\right) \approx 203.$$