6. vizsga végeredményei

4. páros

5. (a)

6. Ha $x \neq 0; 1$, akkor folytonos.
   Az $x = 0$-ban a határérték e^{-1}, ami nem egyezik meg a függvény értékével, így ez megszüntethető szakadás.
   Az $x = 1$-ben pedig a határértékek:
$$\lim_{x\to 1-} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$$
$$\lim_{x\to 1+} e^{\frac{1}{x-1}} = \infty,$$
   így ez szinguláris szakadás.

7. A függvény: $f(x) = \dfrac{80+\frac{x^2}{5}}{x} = \dfrac{80}{x} + \dfrac{x}{5}$, melynek deriváltja: $f'(x) = -\dfrac{80}{x^2} + \dfrac{1}{5}$, mely $x = \pm 20$-ban tűnik el, amik közül csak az $x = 20$ értelmes.
   Ez minimum, hiszen a második derivált: $f''(x) = 2\dfrac{80}{x^3}$ pozitív.

8. ÉT: $\mathbb{R}$, zérushely: $x = \pm 1; 2$, paritás, periódus nincsen.
   $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, és itt nincs ferde aszimptota.
   $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = +\infty$, és itt sincs ferde aszimptota.
   $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$, melynek gyökei $\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$, köztük monoton csök., másutt nő.
   $f''(x) = 6x - 4$ így $\dfrac{2}{3}$-ig konkáv, utána konvex.
   ÉK: $\mathbb{R}$.

9. $f'(x) = -2\dfrac{\cos(3x)}{3} + C_1$, ahol $C_1 = \frac{8}{3}$
   $f(x) = -2\dfrac{\sin(3x)}{9} + \dfrac{8}{3}x + C_2$, ahol $C_2 = 3$.

10.
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(\operatorname{tg}(x))^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

11. $f'(x) = \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}$, aminek a segítségével az ívhossz:
$$\int_3^7 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_3^7 \sqrt{\frac{13}{4}+\frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{13}{4}+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_3^7 =$$
$$= \frac{8}{27}\left(19^{\frac{3}{2}} - 10^{\frac{3}{2}}\right) \approx 15,17.$$