1. vizsga megoldásvázlata

5. (d)

6. A $(2,0,-1)$, $(3,-2,1)$ vektorok vektoriális szorzata $(-2,-5,-4)$, így a sík egyenlete: $-2x-5y-4z=-32$, így a $(2,3,5)$ pont távolsága $\left|\frac{-39+32}{\sqrt{45}}\right| = \frac{7}{\sqrt{45}} \approx 1{,}04$.

7.
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \underset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\overset{s_2-s_1}{=}} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{s_3-5s_1 \\ s_4-7s_1}}{\overset{s_2-2s_1}{=}} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 17 \\ 0 & -3 & -8 & 28 \\ 0 & -12 & -11 & 40 \end{vmatrix} \overset{s_1\cdot(-1)}{=}$$
$$(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -17 \\ 0 & -3 & -8 & 28 \\ 0 & -12 & -11 & 40 \end{vmatrix} \underset{s_4+12s_2}{\overset{s_3+3s_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -17 \\ 0 & 0 & -11 & -23 \\ 0 & 0 & -23 & -164 \end{vmatrix} = (-11)\cdot(-164)-(-23)^2 = 1275$$

8.
$$f'_x(x,y) = -3x^2+y^2+3$$
$$f'_y(x,y) = 2xy-4y$$
A második eltűnéséből $y=0$ vagy $x=2$. Előbbi esetben $x=\pm1$, utóbb $y=\pm3$.
Stacionárius pontok: $(1,0), (-1,0), (2,3), (2,-3)$.
Hesse-determináns: $(-6x)(2x-4)-(2y)^2$, így $(-1,0), (2,3), (2,-3)$ nyeregpont, $(1,0)$ lokális maximumhely, értéke -2.

9. Hengerkoordinátákat alkalmazunk, a határok:
$$0 \le r \le 3, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le m \le 9+2(r\sin\varphi)(r\cos\varphi)$$
$$\int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{9+2r^2\sin\varphi\cos\varphi} 1\cdot r \,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^3 \int_0^{2\pi} 9r+2r^3\sin\varphi\cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$
$$= \int_0^3 \left[9r\varphi + 2r^3\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}r = \int_0^3 18\pi r = \left[9\pi r^2\right]_{r=0}^3 = 81\pi \approx 254{,}47$$

10.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n-2^{2n}}{3^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^{2n}/3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^{2n}/3} = \sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n =$$
$$= \frac{3\cdot\frac{5}{9}}{1-\frac{5}{9}} - \frac{3\cdot\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{15}{4} - \frac{12}{5} = \frac{27}{20} = 1{,}35$$

11.
$$2x\sin(2x) = 2x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2x)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+2}}{(2n+1)!} x^{2n+2} = 4x^2 - \frac{8}{3}x^4 + \frac{8}{15}x^6 + \dots$$
Mivel a sin függvény hatványsora minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens, így ez is, tehát a konvergenciasugár végtelen.