1. vizsga megoldásvázlata

5. (b)

6. A $(2,3,4)$, $(1,0,2)$ vektorok vektoriális szorzata $(6,0,-3)$, így a sík egyenlete: $6x-3z=15$, avagy $2x-z=5$, így a pont távolsága $\left|\frac{4-4-5}{\sqrt{5}}\right| = \sqrt{5} \approx 2{,}236$.

7. $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 7 & 5 & 1 & 5 \\ 2 & 8 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right] \overset{s_2/2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 5 & 1 & 5 \\ 2 & 8 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right] \underset{s_3-2s_1}{\overset{s_2-3s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right] \overset{s_3+s_2}{\sim}$
$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{s_2/(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 2 \end{array}\right] \overset{s_1-3s_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 & -3 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 2 \end{array}\right]$

Tehát x_3, x_4 szabad paraméter, és $x_1 = -3-x_3/2-3x_4/2$ és $x_2 = 2-x_3/2+x_4/2$.

8. $\sqrt{6}-\sqrt{2}i = \sqrt{8}(\cos(-30°)+i\sin(-30°))$, így a harmadik gyökök:
$$\sqrt{2}(\cos(-10°)+i\sin(-10°))$$
$$\sqrt{2}(\cos(110°)+i\sin(110°))$$
$$\sqrt{2}(\cos(230°)+i\sin(230°))$$

9.
$$f'_x(x,y) = \frac{y(x+y)-xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2} \qquad f'_x(1,-2)=4$$
$$f'_y(x,y) = \frac{x(x+y)-xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2} \qquad f'_y(1,-2)=1$$

Így a gradiens $(4,1)$. Az iránymenti derivált minimuma ennek hosszának az ellentettje: $-\sqrt{17} \approx -4{,}123$.

10. $F(x,y,\lambda) = 2x+8y-6+\lambda(x^2+2y^2-9)$ Lagrange-függvénnyel:
$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= 2+2\lambda x & \Rightarrow\quad & x=-\tfrac{1}{\lambda} \\ F'_y(x,y,\lambda) &= 8+4\lambda y & \Rightarrow\quad & y=-\tfrac{2}{\lambda} \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2+2y^2-9 & \Rightarrow\quad & \left(-\tfrac{1}{\lambda}\right)^2+2\left(-\tfrac{2}{\lambda}\right)^2=9, \end{aligned}$$
azaz $\lambda=\pm 1$, és a stacionárius pontok: $(-1,-2,1)$ és $(1,2,-1)$. Hesse-determináns:
$$\begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 4\lambda & 4y \\ 2x & 4y & 0 \end{vmatrix} = -16\lambda x^2 - 32\lambda y^2 = -16\lambda\left(x^2+2y^2\right),$$
mely a $(-1,-2,1)$ pontban negatív (lokális minimumhely), értéke -24, és a $(1,2,-1)$ pontban pozitív (lokális maximumhely), értéke 12.

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}-2^{2n-1}}{7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9\cdot 3^n}{7^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}/2}{7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 9\left(\frac{3}{7}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{4}{7}\right)^n =$$
$$= 9\frac{\frac{3}{7}}{1-\frac{3}{7}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{4}{7}}{1-\frac{4}{7}} = \frac{27}{4} - \frac{2}{3} = \frac{73}{12} \approx 6{,}0833$$