2. vizsga megoldásvázlata

5. (d)

6.

$$\int_0^\infty \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{4+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{4}\cdot 2\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^b = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785.$$

7. Az alábbi mátrix rangja a kérdés:

$$\begin{bmatrix} 13 & 19 & 9 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 13 & 19 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 13 & 19 & 9 \\ -1 & -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

így a rang 2, azaz két lineárisan független vektor választható ki.

8.

$$\frac{3-2i}{4+6i} = \frac{3-2i}{4+6i}\cdot\frac{4-6i}{4-6i} = \frac{12-8i-18i+12i^2}{16+36} = \frac{-26i}{52} = -\frac{1}{2}i$$

9.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)\cdot 3^{2n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)\cdot(3^2)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}\cdot 9} = \frac{1}{9},$$

így a konvergenciasugár 9. Mivel $x_0=-2$, így $(-11,7)$ intervallumban konvergens, a széleken:

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(-11+2)^n}{(n+1)3^{2n}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-9)^n}{(n+1)3^{2n}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1},\ \text{ami Leibniz-sor, így konvergens.}$$

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{(7+2)^n}{(n+1)3^{2n}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{9^n}{(n+1)3^{2n}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1},\ \text{ami divergens.}$$

Tehát a konvergenciaintervallum $[-11,7)$.

10. A parciális deriváltak:
$f'_x(x,y) = 2xy-6y$
$f'_y(x,y) = x^2-6x+3y^2+6y$
Ha az első eltűnik: $2xy-6y=(2x-6)y=0$, akkor $x=3$, vagy $y=0$. Az első esetben az y szerinti parciális derivált: $9-18+3y^2+6y$, melynek gyökei $1,-3$. Ha $y=0$, akkor $x=0$ vagy $x=6$, így a stacionárius pontok: $(3,1),(3,-3),(0,0),(6,0)$.
A másodrendű parciális deriváltak:
$f''_{xx}(x,y)=2y$
$f'_{xy}(x,y)=2x-6$
$f''_{yy}=6y+6$,
így a Hesse-determináns: $2y(6y+6)-(2x-6)^2$, mely a $(3,1)$ és $(3,-3)$ pontokban pozitív, így ezek lokális szélsőértékek, míg $(0,0),(6,0)$ pontokban negatív, így ezek nem lokális szélsőértékek. A $(3,1)$ lokális minimum, értéke: -5, míg a $(3,-3)$ lokális maximum, értéke: 27.

11.

$$\int_0^1\int_{2x}^2 xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{y=2x}^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 2x-2x^3\,\mathrm{d}x = \left[x^2-\frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$