2. vizsga megoldásvázlata

5. (d)

6.

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{8-i}{3-2i} = \frac{8-i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{24-3i+16i+2}{9+4} = \frac{26+13i}{13} = 2+i$$

$$|z_1| - \frac{z_2}{z_1} + \overline{z_2} = \sqrt{9+4} - (2+i) + 8 + i = 6 + \sqrt{13} \approx 9{,}61$$

7.

$$\mathbf{Av} = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p+6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

A második koordinátából $\lambda_1 = 2$, így $2p + 6 = 4$, azaz $p = -1$.
A mátrix karakterisztikus egyenlete:

$$(-1-\lambda)(-\lambda) - 6 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$$

Tehát $\lambda_2 = -3$ a másik sajátérték. Ehhez a $(-1, 1)$ vektor nemnulla számszorosai a sajátvektorok.

8.

$$f'_x(x,y) = y^2 e^{xy} y \qquad\qquad f'_x(0,3) = 27$$

$$f'_y(x,y) = 2ye^{xy} + y^2 e^{xy} x \qquad\qquad f'_y(0,3) = 6$$

A $\mathbf{v}$ vektort normalizáljuk: $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(-1,3)}{\sqrt{1+9}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$. Tehát:

$$f'_{\mathbf{e}}(0,3) = (27,6) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{-27+18}{\sqrt{10}} = -\frac{9}{\sqrt{10}} \approx -2{,}85$$

9. Polárkoordinátákat használunk, a határok:

$$0 \le r \le 2, \qquad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 3(r\cos\varphi)^2 (r\sin\varphi) r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_0^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 3r^4 \cos^2\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^2 \left[-3r^4 \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}r = \int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{2}} r^4 \,\mathrm{d}r = \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{2} = \frac{8\sqrt{2}}{5} \approx 2{,}26$$

10.

$$\left(\frac{2n-3}{2n+5}\right)^n = \frac{\left(1 - \frac{3}{2n}\right)^n}{\left(1 + \frac{5}{2n}\right)^n} = \frac{\left(1 + \frac{-\frac{3}{2}}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{\frac{5}{2}}{n}\right)^n} \to \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{5}{2}}} = e^{-4} \approx 0{,}0183$$

11.

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{x}{2})} = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^{n+1} = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} - \dots,$$

ha $|-\frac{x}{2}| < 2$, azaz $|x| < 2$, így a konvergenciasugár 2.