2. vizsga megoldásvázlata

5. (c)

6. $$\int_2^{18} \frac{2}{\sqrt[5]{(2x-4)^3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 2+} \int_a^{18} 2(2x-4)^{-\frac{3}{5}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 2+} \left[2\frac{1}{2}\frac{(2x-4)^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} \right]_a^{18} = 10$$

7. $$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (3,2,-5) \\ \overrightarrow{AC} = (5,-3,-2) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-19,-19,-19)$$

Így a háromszög területe: $\frac{1}{2}|(-19,-19,-19)| = \frac{1}{2}\cdot 19\sqrt{3} \approx 16{,}45$.

8. $$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & -6 \\ 5 & 3-\lambda & -8 \\ 4 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(3-\lambda)(-4-\lambda)+24(3-\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2-2\lambda),$$

így a sajátértékek $0,2,3$.
A 0-hoz sajátvektor: $(1,1,1)$, 2-höz: $(3,1,2)$, 3-hoz: $(0,1,0)$.

9. $$f'_x(x,y) = \ln(x+2y) + \frac{x}{x+2y} \qquad f'_x(-1,1) = -1$$
$$f'_y(x,y) = \frac{2x}{x+2y} \qquad f'_y(-1,1) = -2$$

Így az érintősík egyenlete ($f(-1,1) = -1$):

$$z = -(x+1) - 2(y-1) - 1 \iff z = -x - 2y$$

10. $$f'_x(x,y) = 4x^3 - 4y \qquad \Rightarrow \quad y = x^3$$
$$f'_y(x,y) = -4x + 4y^3 \qquad \Rightarrow \quad x = y^3$$

Az első egyenletet a másodikba helyettesítve: $x = x^9$, azaz $x(1-x^8) = 0$, így $x = 0$ vagy $x = \pm 1$. Ezzel három stacionárius pont van: $(0,0), (1,1), (-1,-1)$.
A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix} = 144x^2y^2 - 16,$$

így a $(0,0)$ nyeregpont, a másik kettő lokális minimumhely, mert $12x^2 > 0$, értékük: $f(1,1) = f(-1,-1) = 0$.

11. Ez egy Leibniz-sor (teljesíti a három feltételt), így konvergens.

Az abszolút konvergenciához a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ sort kell vizsgálni, mely a minoráns kritérium szerint divergens:

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{3n}} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \text{ divergens } (\tfrac{1}{2} \not> 1).$$

Tehát az eredeti sor feltételesen konvergens.