3. vizsga megoldásvázlata

5. (d)

6.
$$\mathbf{v}_{||} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} = \frac{3-2+5}{1+1+1}(1,-1,1) = (2,-2,2)$$
$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{||} = (3,2,5) - (2,-2,2) = (1,4,3)$$

7. A determináns: $0+0+12-12-0-6=-6$.

aldeterminánsok: transzponálás: sakktábla: determinánssal osztás:

$$\begin{bmatrix} -3 & -9 & 0 \\ -4 & -12 & 2 \\ -4 & -6 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & -4 & -4 \\ -9 & -12 & -6 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 4 & -4 \\ 9 & -12 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{3}{2} & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

8.
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{2-i} = \frac{3+4i}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i} = \frac{6+8i+3i+4i^2}{4+1} = \frac{2+11i}{5} = \frac{2}{5}+\frac{11}{5}i$$
$$|z_1| - \overline{z_2} - \frac{z_1}{z_2} = 5-(2+i)-\left(\tfrac{2}{5}+\tfrac{11}{5}i\right) = \tfrac{13}{5}-\tfrac{16}{5}i = 2{,}6-3{,}2i$$

9. Mivel $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = (3a+6, 22)$, így a $\mathbf{v}_1$-hez tartozó sajátérték $\lambda_1 = 11$, és így $a=9$. Ekkor a karakterisztikus polinom:
$$(9-\lambda)(5-\lambda)-12 = \lambda^2-14\lambda+33 = (\lambda-11)(\lambda-3),$$
így $\lambda_2 = 3$. Ehhez tartozó sajátvektor pl. az $(1,-2)$.

10. A $g(x,y)=x+y-2$ függvénnyel a Lagrange-függvény:
$F(x,y,\lambda) = x^2+3xy+3y^2+\lambda(x+y-2)$. A parciális deriváltjai:
$$F'_x(x,y,\lambda) = 2x+3y+\lambda$$
$$F'_y(x,y,\lambda) = 3x+6y+\lambda$$
$$F'_\lambda(x,y,\lambda) = x+y-2$$
Ezek eltűnése egy lineáris egyenletrendszert ad x,y,λ-ra:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$
Tehát $\lambda=-3$, $y=-1$ és $x=3$. A Hesse-determináns:
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3+3-6-2 = -2 < 0,$$
így ez feltételes lokális minimum, értéke: $f(3,-1)=3$.

11.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-3}+5^{n+1}}{3^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n/8}{(3^2)^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 5^n}{(3^2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8}\left(\frac{2}{9}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}5\left(\frac{5}{9}\right)^n =$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{9}} + 5\cdot\frac{\frac{5}{9}}{1-\frac{5}{9}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7}+5\cdot\frac{5}{4} = \frac{44}{7} \approx 6{,}286$$