4. vizsga megoldásvázlata

5. (d)

6. A sík normálvektora: $\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (-2, -7, -1)$, így a sík egyenlete: $2x + 7y + z = 26$.

7.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \\ 3 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 5 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -3 & 5 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{17}{4} & \frac{17}{2} \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tehát $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 2$.

8. $z = 1 - \sqrt{3}i = 2(\cos(-60°) + i\sin(-60°))$, így

$$z^9 = 2^9(\cos(-9 \cdot 60°) + i\sin(-9 \cdot 60°)) = 2^9(\cos(180°) + i\sin(180°)) = -512.$$

9.

$$e^{-0,1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-0,1)^n}{n!} = 1 - \frac{0,1}{1} + \frac{0,1^2}{2} - \frac{0,1^3}{6} + \frac{0,1^4}{24} - \cdots$$

Ez egy Leibniz-sor, így a sorösszeg és a részletösszeg eltérését becsülhetjük a következő taggal:

$$\left| e^{-0,1} - \left(1 - \frac{0,1}{1} + \frac{0,1^2}{2}\right)\right| < \frac{0,1^3}{6},$$

így $e^{-0,1} \approx 1 - \dfrac{0,1}{1} + \dfrac{0,1^2}{2} = 0,905$.

10. $f'_x(x,y) = -\dfrac{2y+1}{x^2}$, ami a P pontban: $f'_x(P) = -7$
$f'_y(x,y) = \dfrac{2}{x}$, ami a P pontban: $f'_y(P) = 2$
$\mathrm{grad} f(P) = (-7, 2)$.
$\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \dfrac{(5,12)}{\sqrt{169}} = \left(\dfrac{5}{13}, \dfrac{12}{13}\right)$
$f'_{\mathbf{v}}(P) = \langle \mathrm{grad} f(P), \mathbf{e}\rangle = \dfrac{-35}{13} + \dfrac{24}{13} = -\dfrac{11}{13} \approx -0,846$
Az iránymenti derivált minimuma a gradiens hosszának ellentettje, azaz:
$-|\mathrm{grad} f(P)| = -\sqrt{(-7)^2 + 2^2} = -\sqrt{53} \approx -7,28$.

11. Polárkoordinátákat használunk. Az $x^2 + y^2 \leq 3$ feltételből $0 \leq r \leq \sqrt{3}$, míg a $0 \leq y \leq x$ feltételből $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2(r\cos\varphi)(r\sin\varphi) + 1)\, r \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2r^3 \cos\varphi \sin\varphi + r \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$
$$= \int_0^{\sqrt{3}} \left[r^3(\sin\varphi)^2 + r\varphi\right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}r = \int_0^{\sqrt{3}} r^3\frac{1}{2} + r\frac{\pi}{4}\,\mathrm{d}r = \left[\frac{r^4}{8} + \frac{r^2}{2}\frac{\pi}{4}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{9+3\pi}{8} \approx 2,303.$$