4. vizsga megoldásvázlata

5. (a)

6. A $(4,3,2)$, $(1,0,-2)$ vektorok vektoriális szorzata $(-6,10,-3)$, így a sík egyenlete $-6x+10y-3z=-7$. Az $(5,3,4)$ pont távolsága:

$$\left|\frac{-6\cdot 5+10\cdot 3-3\cdot 4+7}{\sqrt{36+100+9}}\right| = \frac{5}{\sqrt{145}} \approx 0{,}415$$

7.
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2&3&5&7&2\\ 3&1&2&2&8\\ 2&4&0&2&8\\ 3&3&1&5&7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&1&4\\ 3&1&2&2&8\\ 2&3&5&7&2\\ 3&3&1&5&7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&1&4\\ 0&-5&2&-1&-4\\ 0&-1&5&5&-6\\ 0&-3&1&2&-5 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&1&4\\ 0&1&-5&-5&6\\ 0&-5&2&-1&-4\\ 0&-3&1&2&-5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&1&4\\ 0&1&-5&-5&6\\ 0&0&-23&-26&26\\ 0&0&-14&-13&13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&1&4\\ 0&1&-5&-5&6\\ 0&0&5&0&0\\ 0&0&-14&-13&13 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&1&4\\ 0&1&-5&-5&6\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&-13&13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&1&4\\ 0&1&-5&-5&6\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&2&0&0&5\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&-1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&3\\ 0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&-1 \end{array}\right]$$

Tehát $x=3, y=1, z=0, u=-1$.

8. Mivel $i-\sqrt{3} = 2(\cos(150°)+i\sin(150°))$, így
$(i-\sqrt{3})^9 = 2^9(\cos(9\cdot 150°)+i\sin(9\cdot 150°)) = 512(\cos(270°)+i\sin(270°)) = -512i$

9.
$$f'_x(x,y) = ye^{y-2} \qquad f'_x(3,2)=2$$
$$f'_y(x,y) = xe^{y-2}+xye^{y-2} \qquad f'_y(3,2)=9$$

Így az érintősík ($f(3,2)=12$): $z=2(x-3)+9(y-2)+12$.

10.
$$f'_x(x,y) = 4x^3+y^2-6y+5$$
$$f'_y(x,y) = 2xy-6x \qquad \Rightarrow \qquad 2x(y-3)=0$$

A másodikból $x=0$ vagy $y=3$. Ezeket az elsőbe visszahelyettesítve kapjuk a stacionárius pontokat: $(0,1),(0,5),(1,3)$. A Hesse-determináns:

$$\begin{vmatrix} 12x^2 & 2y-6\\ 2y-6 & 2x \end{vmatrix} = 24x^3-(2y-6)^2,$$

mely az első kettő stacionárius pontban negatív (nyeregpont), a harmadikban pozitív, ami lokális minimumhely ($12x^2>0$). Értéke: $f(1,3)=0$.

11.
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n-2^{2n+1}}{7^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{7^n/7} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}\cdot 2}{7^n/7} = \sum_{n=0}^{\infty}7\left(\frac{3}{7}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}14\left(\frac{4}{7}\right)^n =$$
$$= 7\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{7}} - 14\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{7}} = 7\cdot\frac{7}{4}-14\cdot\frac{7}{3} = -\frac{245}{12} \approx -20{,}42$$