5. vizsga megoldásvázlata

5. (c)

6. $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, -4)$
$\overrightarrow{AC} = (1, -1, -1)$
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-4, -6, 2)$, így a háromszög területe:
$$\frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 + 2^2}}{2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74.$$

7.
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((4-\lambda)(2-\lambda)+2) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 10),$$
aminek a gyöke a $\lambda_1 = 1$ és a $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ egyenlet megoldásai: $3 \pm i$. A $\lambda_1 = 1$-hez tartozó sajátvektor:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$
Így a sajátvektorok: $\{(5x, -3x, x) \mid x \neq 0\}$, így egy sajátvektor a $(5, -3, 1)$.

8.
$$a_n = \left(\frac{n+2}{n-2}\right)^{2n} = \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{2n}} \to \frac{(e^2)^2}{(e^{-2})^2} = e^8$$

9.
$$\frac{10x}{x^2-5} = -\frac{10x}{5}\frac{1}{1-\frac{x^2}{5}} = -2x\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{5}\right)^n = -2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2}{5^n}x^{2n+1},$$
ami akkor konvergens, ha $\left|\frac{x^2}{5}\right| < 1$, azaz $|x| < \sqrt{5}$.

10. A parciális deriváltak:
$f'_x(x,y) = 2x - 6y$
$f'_y(x,y) = -6x + 3y^2 + 6y$
Ha az első eltűnik: $2x - 6y = 0$, így $x = 3y$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve: $-6 \cdot 3y + 3y^2 + 6y = 0$, azaz $3y^2 - 12y = 0$, azaz $y^2 - 4y = 0$, így $y = 0$ vagy $y = 4$. Így két stacionárius pont van: $(0,0)$ és a $(12,4)$.

A másodrendű parciális deriváltak:
$f''_{xx}(x,y) = 2$
$f'_{xy}(x,y) = -6$
$f''_{yy} = 6y + 6$,
így a Hesse-determináns: $2(6y+6) - (-6)^2 = 12y - 24$, mely a $(0,0)$ pontban negatív, így ez nem lokális szélsőérték, míg a $(12,4)$ pontban pozitív, így ez lokális szélsőérték, mégpedig lokális minimum ($f''_{xx}(12,4) = 2 > 0$), értéke: $f(12,4) = -32$.

11. Fel kell cserélni az integrálás sorrendjét:
$$\int_0^1 \int_{3x}^3 \cos(y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \int_0^{\frac{y}{3}} \cos(y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3 \left[x\cos(y^2)\right]_{x=0}^{\frac{y}{3}}\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^3 \frac{y}{3}\cos(y^2)\,\mathrm{d}y = \left[\frac{\sin(y^2)}{6}\right]_{y=0}^3 = \frac{\sin(9)}{6} \approx 0{,}0687.$$