5. vizsga megoldásvázlata

5. (c)

6. A vektoriális szorzat: $(1,-1,1)$. A vektorok által bezárt szög:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 150^\circ$$

7.
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tehát a rang 2, így 2 lineárisan független vektor választható ki.

8.
$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 5 \\ -2 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = ((3-\lambda)(3-\lambda)-(-4))\,(5-\lambda) = \left(\lambda^2-6\lambda+13\right)(5-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 5 \quad \text{és} \quad \lambda_{2,3} = \frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 13}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{6\pm 4i}{2} = 3\pm 2i$$

A $\lambda_1 = 5$-höz egy sajátvektor: $(9,-1,4)$.

9.
$$f'_x(x,y) = \frac{y(x^3+y^2)-xy\cdot 3x^2}{(x^3+y^2)^2} = \frac{-2x^3y+y^3}{(x^3+y^2)^2} \qquad f'_x(1,-1) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$
$$f'_y(x,y) = \frac{x(x^3+y^2)-xy\cdot 2y}{(x^3+y^2)^2} = \frac{x^4-xy^2}{(x^3+y^2)^2} \qquad f'_y(1,-1) = 0$$
$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(2,3)}{\sqrt{13}} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \qquad f'_{\mathbf{e}}(1,-1) = \left(\frac{1}{4},0\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{13}} \approx 0{,}139$$

10. $g(x,y) = xy-12$, a Lagrange-függvény: $F(x,y,\lambda) = x^2+9y^2+\lambda(xy-12)$.
$$F'_x(x,y,\lambda) = 2x+\lambda y, \quad F'_y(x,y,\lambda) = 18y+\lambda x, \quad F'_\lambda(x,y,\lambda) = xy-12$$

Az elsőből $x = -\frac{\lambda y}{2}$, melyet a másodikba helyettesítve kapjuk, hogy $y = 0$ (feltétel miatt nem jó) vagy $\lambda = \pm 6$ (feltétel miatt $-$). Egyetlen stacionárius pont: $(6,2,-6)$. A Hesse-determináns:
$$\begin{vmatrix} 2 & \lambda & y \\ \lambda & 18 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\lambda xy - 2x^2 - 18y^2, \text{ ami a } (6,2,-6) \text{ pontban } -288 < 0,$$

így ez feltételes lokális minimum, értéke: $f(6,2) = 72$.

11.
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^{n+1}-3^{n-1}}{2^{3n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n\cdot 5}{2^{3n}/2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n/3}{2^{3n}/2} = \sum_{n=0}^{\infty}10\left(\frac{5}{8}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{3}{8}\right)^n =$$
$$= 10\cdot\frac{1}{1-\frac{5}{8}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{8}} = 10\cdot\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{8}{5} = \frac{128}{5} = 25{,}6$$