A második hét anyagának vázlata:

Véges és végtelen numerikus sorozatok. Számtani és mértani haladványok és összegük. Végtelen numerikus sorozat monotonitása, korlátossága, konvergenciája, határértéke. Konvergens sorozat határértéke egyetlen. Konvergens sorozat korlátos. Korlátos és monoton sorozat konvergens. Rendőrszabály. Minden korlátos végtelen sorozatnak van konvergens részsorozata. Ha egy végtelen monoton sorozatnak van konvergens részsorozata, akkor az egész sorozat is konvergál ugyanoda. Cauchy-féle konvergencia-kritérium. Torlódási pont, $\limsup$, $\liminf$.

Az „x alatt k" függvény definíciója tetszőleges valós x és $k = 0, 1, 2, ...$ esetén. Teljes indukciós bizonyítások. Binomiális tétel.

Műveletek konvergens sorozatokkal. Végtelen sorozatok megadása rekurzióval. Teljes indukciós bizonyítások. Nevezetes konvergens sorozatok, például $\sqrt[n]{n}$, $(1 + \frac{1}{n})^n$.

—

Háttéranyag:

1. Thomas-féle Kalkulus I. kötet F.1. függelék
2. Urbán,J.: Határértékszámítás, Műszaki Könyvkiadó, 1975

—

Egy numerikus sor ez: $a_1, a_2, a_3, ...$ ahol minden a_i egy valós szám. A sorozat lehet véges vagy végtelen. Ha $a_{i+1} - a_i$ nem függ i-től, számtani sorozatról beszélünk. Ha egyetlen a_i sem nulla, továbbá a_{i+1}/a_i állandó, akkor mértani sorozatról beszélünk. Más elnevezések: számtani sorozat = aritmetikai sorozat, mértani sorozat = geometriai sorozat, számtani vagy mértani sorozat = haladvány.

Magyarországi György mester 500 éve kinyomtatta, hogyan lehet a véges haladványok elemeinek összegét kiszámítani. Mai képletekkel:

$$a_1 + ... + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$$

ha a haladvány számtani, és

$$a_1 + ... + a_n = \frac{a_1(a_{n+1} - a_1)}{a_2 - a_1}$$

ha a haladvány mértani és $a_1 \neq a_2$. Például

$$1 + 3 + 5 + ... + 2007 = 1004 \cdot \frac{1 + 2007}{2} = 1004^2$$

és

$$\frac{125}{32} + \frac{25}{16} + \frac{5}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{2}{50} + \frac{4}{250} = \frac{\frac{125}{32}\left(\frac{8}{1250} - \frac{125}{32}\right)}{\frac{25}{16} - \frac{125}{32}} = \frac{25\,999}{4000} = 6.\,499\,75$$

Minden számtani haladvány monoton, és az azonos előjelű elemekből álló mértani haladványok is. De nem minden sorozat monoton. Vannak korlátos és nemkorlátos végtelen sorozatok. Egy végtelen számtani sorozat csak akkor korlátos, ha azonosak az elemei. Egy végtelen mértani sorozat csak akkor korlátos, ha az állandó $a_{i+1}/a_i = q$ hányadosra teljesül, hogy $-1 \leq q \leq 1$. Ha még $-1 < q < 1$ is teljesül, akkor a végtelen mértani sorozat 0-hoz tart. Ilyen esetben még az $\frac{a_1(a_{n+1}-a_1)}{a_2-a_1}$ sorozat is konvergens, és a határértéke: $\frac{a_1^2}{a_1-a_2}$. Például

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + ... + \frac{4^k}{9^k} \rightarrow \frac{3}{5}$$

ha $k \rightarrow \infty$, hiszen most $a_1 = 1$ és $a_2 = \frac{-2}{3}$.

Tetszőleges x valós számra és nemnegatív egész k-ra az $\binom{x}{k}$ számokat így definiáljuk: $\binom{x}{0} = 1$ és $\binom{x}{k+1} = \frac{x}{k+1}\binom{x-1}{k}$. A binomialis tétel a következőt állítja: Ha a, b tetszőleges valós számok, n pedig egy tetszőleges pozitív egész szám, akkor

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

A tétel teljes indukcióval bizonyítható.

—

Gyakorlásra javasolt feladatok:

1. Igaz-e, hogy minden pozitív számokból álló, legfeljebb három elemű sorozat számtani vagy mértani?

2. Igazolandók György mester fent említett összegző képletei teljes indukcióval.

3. Bizonyítandó, hogy $1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) = k^2$.

Segítség: Felhasználható a számtani sorozat fenti összegképlete, vagy elvégezhető a bizonyítás teljes indukcióval is.

4. Meg kell mutatni, hogy ha $n \geq k \geq 0$, akkor $\binom{n}{k}$ egész szám.

Segítség: Belátható, hogy egy n-elemű halmaznak pontosan $\binom{n}{k}$ darab k-elemű részhalmaza van.

5. Bizonyítandó, hogy a

$$\frac{p}{q} = \frac{2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + 2006^2}{2007}$$

racionális számra $q = 3$.

Segítség: Teljes indukcióval megmutatható, hogy

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2k)^2 = \binom{2k+2}{3}$$

6. Meg kell mutatni, hogy az $\binom{n}{4}/n^4$ sorozat $n = 4, 5, 6, ...$ esetén szigorúan monoton nő és és korlátos. Mi lesz a határértéke?

7. Konvergensek-e a következő sorozatok? Ha igen, hova tartanak, ha nem, van-e torlódási pontjuk, korlátosak-e és mennyi a lim inf és lim sup? a) $\sqrt{n} - \sqrt[3]{n^2+1}$ b) $\frac{\sin x}{n} - 6$, ahol x egy „rögzített” szám c) $(-1)^n$ d) $\frac{1}{\cos \frac{n+1}{2n}\pi}$ e) $\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n+3}+\sqrt[5]{n+4}}$

8. Bizonyítandó, hogy az

$$a_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{17} - \frac{1}{33} + ... + \frac{1}{4^k + 1}$$

képlettel definiált sorozat szigorúan monoton fogy és korlátos, továbbá hogy egy 0.79 és 0.8 közti számhoz tart.

Segítség: A szigorúan monoton fogyás nyilvánvaló abból, hogy $k = 2, 3, ...$ esetén

$$a_k - a_{k-1} = \frac{1}{4^k + 1} - \frac{1}{2^{2k-1} + 1} = \frac{-4^k}{(4^k + 2)(4^k + 1)}$$

Mivel ez a szám abszolút értékben kevesebb, mint 4^{-k}, ezért $k = 4, 5, ...$ esetén — teljes indukcióval bizonyíthatóan —

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{4^k + 1} \\ \geq \; & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{17} - \frac{1}{33} + \frac{1}{65} - \frac{1}{4^4} - \frac{1}{4^5} - ... - \frac{1}{4^k} \end{aligned}$$

Mivel a

$$\frac{1}{4^4}, \frac{1}{4^5}, ..., \frac{1}{4^k}$$

mértani haladvány összege:

$$\frac{\frac{1}{4^4}\left(\frac{1}{4^{k+1}} - \frac{1}{4^4}\right)}{\frac{1}{4^5} - \frac{1}{4^4}} = \frac{1}{192} - \frac{1}{3 \cdot 4^k} < \frac{1}{192}$$

ezért

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{17} - \frac{1}{33} + \frac{1}{65} + ... + \frac{1}{4^k + 1} \\ &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{17} - \frac{1}{33} + \frac{1}{65} - \frac{1}{192} \\ &= \frac{2060\,143}{7001\,280} > 0.29 \end{aligned}$$

Másrészt

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{17} - \frac{1}{33} + \frac{1}{65} \\ &= \frac{65\,519}{218\,790} < 0.3 \end{aligned}$$

9. Igazolandó, hogy ha $n \geq k > 0$ egész számok, akkor

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$$

továbbá hogy az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat szigorúan monoton növekszik és korlátos, következésképpen konvergens.

Segítség: Az állított egyenlőtlenség nyilvánvaló $k = 1$ esetén. A $k = 2, 3, ...$ esetek rögzített n-re k szerinti teljes indukcióval kezelhetők. Következésképpen: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$. A monotonitás bizonyításához felhasználható a számtani és a mértani közép közti ismert összefüggés: Ha $a_1, a_2, ..., a_m$ pozitív számok, nem mind egyenlők, akkor

$$a_1 \ a_2 \ ... \ a_m \ m^m < (a_1 + a_2 + ... + a_m)^m$$

azaz

$$\sqrt[m]{a_1 a_2 ... a_m} < \frac{a_1 + a_2 + ... + a_m}{m}$$

Ezt ilyen szereposztás mellett lehet használni: $m = n + 1$, $a_1 = a_2 = ... = a_m = 1 + \frac{1}{n}$, $a_{m+1} = 1$. A számtani és mértani közép közti összefüggés egyébként $m = 2$ esetén algebrai átalakítással, nagyobb m-re pedig teljes indukcióval bizonyítható.

10. Bizonyítandó, hogy $n = 3, 4, 5, ...$ esetén a $\sqrt[n]{n}$ sorozat szigorúan monoton fogy és korlátos, következésképpen konvergens, és a határértéke 1.