Függvényhatárérték, folytonosság, differenciálszámítás, derivált, egyszerűbb differenciálási szabályok. Elemi függvények deriváltjai.

Differenciálhatóság geometriai tartalma. Ekvivalens definíció. Folytonossággal való kapcsolat. Második, harmadik deriváltak. Újabb deriválási szabályok: Láncszabály. Inverz függvény deriválása.

Az

$$f^{(0)}(\xi) = \lim_{x \to \xi} f(x)$$

értelmezése olyan f valós szám értékű függvényekre, melyek értelmezési tartománya a valós számok halmaza vagy annak olyan részhalmaza, mely egy vagy több, páronként diszjunkt (nemüres) intervallum úniója: A fenti határértéket olyan ξ és x számokra értelmezzük, melyek benne vannak az f függvény D_f értelmezési tartományában, vagy legalábbis $x \in D_f$ és ξ eleme egy olyan $[x, b)$ alakú vagy $(a, x]$ alakú intervallumnak, melyekre (x, b) illetve (a, x) része D_f-nek. Akkor mondjuk, hogy

$$\lim_{x \to \xi} f(x)$$

létezik, ha a rögzített ξ-re, és az összes lehetséges olyan $x_n \in D_f \setminus \{\xi\}$ sorozatra, amikor $x_n \to \xi$, fennáll az is, hogy az $f(x_n)$ sorozat konvergens, és az összes ilyen sorozat egyazon számhoz konvergál. A

$$\lim_{x \to \xi} f(x)$$

kifejezés értékén ezt az egyazon számot értjük, és ez által a szám által definiáljuk az $f^{(0)}(\xi)$ függvényt minden olyan ξ-re, amikor van konvergencia. Ilyen módon az $f^{(0)}$ függvény értelmezési tartománya megegyezhet D_f-fel, vagy szűkebb is lehet annál (ha egy vagy több pontban nincs konvergencia), vagy bővebb is lehet annál (például ha $D_f = [-1, +1] \setminus \{0\}$, mondjuk az $\frac{\sin}{\arcsin}$ függvénynél, akkor a konvergencia $\xi = 0$ esetén is fennáll).

Az f függvényt folytonosnak nevezzük, ha minden $x \in D_f$ esetén fennáll $f^{(0)}(x) = f(x)$. Ha valamely rögzített $\xi \in D_f$-re áll fenn, hogy $f^{(0)}(x) = f(x)$, akkor azt mondjuk, $f(x)$ folytonos ξ-ben. Tehát $f(x)$ folytonos, ha létezik határértéke minden olyan ξ-ben, melyre $f(\xi)$ értelmezett, és a határérték megegyezik a függvény értékével.

Ha f folytonos ξ-ben, akkor megvizsgálhatjuk, hogy a

$$f^{(1)}(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

határérték létezik-e a fentieknek megfelelő értelmezésben. A folytonosság azért kell, mert a nevező nullához tart, és ezért a határérték létezését csak akkor remélhetjük, ha a számláló is nullához tart. Tehát

$$f^{(1)}(\xi) = g_\xi^{(0)}(\xi)$$

ahol

$$g_\xi(x) = \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

Figyelemre méltó, hogy a g_ξ függvény értelmezési tartománya nem D_f, hanem $D_f \setminus \{\xi\}$. Ha egy rögzített ξ-re értelmezni tudjuk $f^{(1)}(\xi)$-t, akkor azt mondjuk, hogy $f^{(1)}(\xi)$ az f függvény ξ-beli differenciálhányadosa, vagy pontosabban differenciahányados-határértéke, mert a $g_\xi(x)$ kifejezés neve: az $f(x)$ függvény ξ-hez felírt differenciahányadosa. Az összes értelmezhető $f^{(1)}(\xi)$ differenciáhányados által definiált $f^{(1)}$ függvényt hívjuk az f függvény deriváltjának. Tehát a derivált egy függvény, a differenciálhányados pedig egy-egy konkrét ξ-re értelmezett szám. A differenciálhányados-függvény rövid neve tehát az, hogy derivált. Az $f^{(1)}$ függvény hagyományos jelölése: $f\prime$. Az $f\prime(x)$ kifejezés helyett használatosak még a $\frac{d\ f(x)}{d\ x}$ vagy $\frac{d}{d\ x}f(x)$ jelölések is, és ezekben d helyett gyakran ∂ jelet írnak, és $f(x)$ helyett is gyakran egy betűt használnak, például $y = f(x)$ esetén $f\prime(x)$ helyett azt írják, hogy $y\prime$ vagy $\frac{\partial\ y}{\partial\ x}$ vagy $\partial y/\partial x$. Hasonlóképpen az $f\prime$ jelölés helyett néha azt írják, hogy $\frac{\partial}{\partial\ x}$ vagy $\partial/\partial x$

Példa: $f(x) = x$ esetén bármely x-re $f\prime(x) = 1$, hiszen bármely $x_n \to \xi$ sorozatra, ahol egyik x_n sem egyenlő ξ-vel, az

$$\frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi}$$

tört értéke 1-hez tart, hiszen

$$\frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} = \frac{x_n - \xi}{x_n - \xi} = 1$$

Az f függvényből az $f\prime$ kiszámítását deriválásnak nevezzük. Néhány deriválási szabály a következő:

1. Ha $f(x)$ konstans, azaz minden x-re ugyanaz, akkor $f\prime(x) = 0$ minden x-re, hiszen bármely $x_n \to \xi$ sorozatra, ahol egyik x_n sem egyenlő ξ-vel, az

$$\frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi}$$

tört értéke 0-hoz tart, mert egyszerűen a számláló mindig 0.

Szavakkal: Konstans deriváltja nulla.

2. Ha az f és g függvényekre értelmezhető $f\prime$ és $g\prime$, akkor ott, ahol $f\prime + g\prime$ is értelmezhető, ott fennáll, hogy

$$(f+g)\prime(x) = f\ \prime(x) + g\ \prime(x)$$

hiszen bármely szóbajövő $x_n \to \xi$ sorozatra, ahol egyik x_n sem egyenlő ξ-vel, az

$$\frac{(f+g)(x_n) - (f+g)(\xi)}{x_n - \xi}$$

tört értéke az $f\ \prime(\xi) + g\ \prime(\xi)$ számhoz tart, egyszerűen azért, mert

$$\frac{(f+g)(x_n) - (f+g)(\xi)}{x_n - \xi} = \frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} + \frac{g(x_n) - g(\xi)}{x_n - \xi}$$

Szavakkal: Összeg deriváltja a deriváltak összege.

3. Ha az f és g függvényekre értelmezhető $f\prime$ és $g\prime$, akkor ott, ahol $f\prime \cdot g\prime$ értelmezhető, fennáll, hogy

$$(f \cdot g)\prime(x) = (f\prime \cdot g)(x) + (f \cdot g\prime)(x)$$

hiszen bármely szóbajövő $x_n \to \xi$ sorozatra, ahol egyik x_n sem egyenlő ξ-vel, az

$$\frac{(f \cdot g)(x_n) - (f \cdot g)(\xi)}{x_n - \xi}$$

tört értéke az $(f\prime \cdot g)(\xi) + (f \cdot g\prime)(\xi)$ számhoz tart, mert

$$\begin{aligned} & \frac{(f \cdot g)(x_n) - (f \cdot g)(\xi)}{x_n - \xi} \\ = \quad & \frac{f(x_n) \cdot g(x_n) - f(\xi) \cdot g(\xi)}{x_n - \xi} \\ = \quad & \frac{f(x_n) \cdot g(x_n) - f(x_n) \cdot g(\xi) + f(x_n) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g(\xi)}{x_n - \xi} \\ = \quad & \frac{f(x_n) \cdot g(x_n) - f(x_n) \cdot g(\xi)}{x_n - \xi} + \frac{f(x_n) \cdot g(\xi) - f(\xi) \cdot g(\xi)}{x_n - \xi} \\ = \quad & f(x_n) \cdot \frac{g(x_n) - g(\xi)}{x_n - \xi} + \frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} \cdot g(\xi) \end{aligned}$$

és itt f folytonossága miatt $f(x_n) \to f(\xi)$, és ezért

$$f(x_n) \cdot \frac{g(x_n) - g(\xi)}{x_n - \xi}$$

határértéke $f(\xi) \cdot g\,\prime(\xi) = (f \cdot g\,\prime)(\xi)$, továbbá

$$\frac{f(x_n) - f(\xi)}{x_n - \xi} \cdot g(\xi)$$

határértéke $f\,\prime(x) \cdot g(\xi) = (f\,\prime \cdot g)(\xi)$.

Szavakkal: Szorzat deriváltja a deriváltak szorzata.

4. Az előzők speciális eseteként kapjuk, hogy ha f constans, mondjuk $f(x) = c$, akkor

$$(c \cdot g)\prime(x) = c \cdot g\prime(x)$$

Szavakkal: „Konstansszor a függvény” deriváltja konstansszor a derivált.

5. Ez utóbbit $c = -1$ esetére alkalmazva nyerjük, hogy

$$(f - g)\prime(x) = f\prime(x) - g\prime(x)$$

hiszen $-g$ deriváltja g deriváltjának minuszegyszerese.

Szavakkal: Különbség deriváltja a deriváltak különbsége.

Példa. Most tekintsük az

$$\frac{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{\xi}}{x_n - \xi}$$

képletet. Átalakítással az kapjuk:

$$\frac{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{\xi}}{x - \xi} = \frac{-1}{\xi \cdot x_n}$$

Ha most $x_n \to \xi$, akkor $\frac{-1}{\xi x_n}$ határértéke $-\xi^{-2}$. Ezért az $1/x$ függvény deriváltja $-x^{-2} = -1/x^2$.

Szavakkal: A reciprok-függvény deriváltja a négyzetének az ellentettje.

Most az úgynevezett láncszabály következik, mint deriválási szabály.

6. Ott — azaz olyan x-ekre —, ahol értelmezhető az f és g függvényekre az $f\,'(g(x)) \cdot g\,'(x)$ szorzat, az $f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ összetett függvény is értelmezhető, és fennáll:

$$(f \circ g)'(x) = ((f' \circ g) \cdot g')(x)$$

azaz $f(g(x))$ deriváltja: $f'(g(x)) \cdot g'(x)$. A bizonyítás azon múlik, hogy $x_n \to \xi$ esetén az $y_n = g(x_n)$, $\eta = g(\xi)$, $z_n = f(y_n)$, $\zeta = f(\eta)$ jelölésekkel a

$$\frac{z_n - \zeta}{x_n - \xi}$$

tört

$$\frac{z_n - \zeta}{y_n - \eta} \cdot \frac{y_n - \eta}{x_n - \xi}$$

alakban szorzattá bontható, és így a megkívánt konvergenciák fennállnak. A szabályt azért hívják láncszabálynak, mert a

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

képlet egy vízszintesen kifeszített láncra emlékeztet. Következményképpen azt is megkaphatjuk, hogy

$$(f \circ g \circ h)' = (f' \circ g \circ h) \cdot (g' \circ h) \cdot h'$$

Szavakkal: A láncszabály azt jelenti, hogy függvények kompozícióját — azaz láncolatát, vagy megint más kifejezéssel egymásba helyettesítését — úgy deriválhatjuk, hogy a „láncszemekkel" egyesével elbánva deriválunk, és a „láncszem"-deriváltakat „láncbaszedve" összeszorozzuk.

7. A fentieket kombinálva kapjuk, hogy

$$(f\,/g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

hiszen $f\,/g = f \cdot (h \circ g)$, ahol $h(x) = 1/x$.

Szavakkal: Hányadosfüggvény deriváltját úgy kapjuk meg, hogy a nevező négyzetével elosztjuk a számláló deriváltja nevezővel vett szorzatának és a számláló nevező deriváltjával vett szorzatának a különbségét.

7. Ha az f és g függvények egymás inverzei, és mindkettő deriválható, akkor a láncszabály alapján — mivel $(f \circ g)(x) = x$ teljesül minden $x \in D_g$-re — azt kapjuk, hogy

$$(f \circ g)\prime(x) = 1$$

teljesül minden $x \in D_g$-re, és ezért

$$f\prime(g(x)) \cdot g\,\prime(x) = 1$$

Ez azt is maga után vonja, hogy $g\,\prime(x)$ értéke sosem nulla, és így

$$f\prime(g(x)) = \frac{1}{g\,\prime(x)}$$

azaz $f\,\prime \circ g$ és $g\,\prime$ egymás reciprokai. Úgyanúgy $g\,\prime \circ f$ és $f\,\prime$ is egymás reciprokai.

Szavakkal: Ha egy invertálható függvény deriváltját komponáljuk az inverzével, akkor az inverz deriváltját kapjuk.

Példa: A szorzat deriválási szabálya alapján teljes indukcióval könnyen megkapható, hogy x^n deriváltja nx^{n-1} minden rögzített n-re $n = 0, 1, 2,...$ esetén.Ha $k = 2, 3, 4...$ esetén pozitív x-ekre illetve $k = 3, 5, 7, ...$ esetén vagy a pozitív x-ekre vagy a negatív x-ekre értelmezzük a $\sqrt[k]{x}$ függvényt, akkor — mivel az inverze x^k — azt kapjuk, hogy

$$\left(\sqrt[k]{x}\right)\prime = \frac{1}{k\sqrt[k]{x^{k-1}}}$$

Újra a szorzat deriválási szabályát és újra teljes indukciót alkalmazva kijön, hogy tetszőleges p/q alakú racionális számra:

$$\left(x^{p/q}\right)\prime = \frac{p}{q}x^{(p-q)/q}$$

Például: $(\sqrt[3]{x^2})\prime = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ mind negatív, mind pozitív x-ekre.

Konkrét feladatok:

1. Kiszámítandók a következő függvények deriváltjai:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x^{-5}} + \sqrt[5]{x^{-4}}}$$

$$\frac{1}{2 + 3x^4 + \frac{5}{6+7x}}$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 + 3x}}$$

2.

$$\lim_{x \to 0} \left(\sqrt[3]{x^2}\right)\prime = ?$$

3. Milyen x-ekre nem értelmezett, milyen x-ekre nem folytonos és milyen x-ekre nem differenciálható a következő függvény?

$$f(x) = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{x-1}} - \frac{3}{\sqrt{4-x}}}$$

Mennyi az $f(x_n)$ sorozat határértéke, ha $1 < x_1 < x_2 < ...$ és $x_n \to 4$?

4. Határozzuk meg az $f^{(0)}(x)$ függvényt, ha

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} - \frac{x + 2}{x^2 + 5x + 6}$$

Hol differenciálható az $f^{(0)}(x)$ függvény?