A negyedik oktatási héten — többek közt — a Thomas-féle Kalkulus I. kötetének 220. és 221. oldalain található feladatok közül néhányat, illetve azokhoz hasonló feladatokat oldunk meg. Különféle gyakorlati optimalizálási feladatok is találhatók a könyvben.

——

Deriválás:

Kiszámítandó a következő függvények deriváltja:

$$\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$$

$$x^7+\sqrt{7}x+\sqrt{7x}+\sqrt[7]{x}$$

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$$

$$x\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

Implicit deriválás:

Ha $y=f(x)$ és $\sqrt{xy}=1$, akkor mennyi $y\prime$?

Ha $p^3+4pq-3q^2=2$, akkor mennyi $\partial p/\partial q$?

Ha a $\partial^2 u/\partial w^2$ jelölést — ahogy szokás — a $\partial(\partial u/\partial w)/\partial w$ értelemben használjuk, akkor mennyi lesz $\partial^2 a/\partial b^2$, ha $a^2+b^2=c^2$ és itt c egy állandó? (Egy c átmérőjű kör kerületén mozgó pont által az átmérővel alkotott derékszögű háromszögre felírt Püthagórász-tételről van szó.)

Ellenőrizzük, hogy kielégül-e az $x^2-y^2=1$ egyenletű hiperbola egy mozgó pontjára a következő két differenciálegyenlet: $\partial y/dx=x/y$, $\partial^2 y/\partial x^2=-1/y^3$?

—

Megoldások: A deriváltak a következők:

$$\left(\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\right)\prime=\frac{\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{2}+\frac{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{2x}$$

$$\left(x^7+\sqrt{7}x+\sqrt{7x}+\sqrt[7]{x}\right)\prime=7x^6+\sqrt{7}+\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[7]{x}}{7x}$$

$$\begin{aligned} & \left((1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\right)\prime \\ = & \left(1+x+x^2+...+x^{15}\right)\prime \\ = & 1+2x+3x^2+...+15x^{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(x\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)\prime &= \frac{6x+5\sqrt{x}}{4\sqrt{x+\sqrt{x}}} \\ &= \frac{5}{4}\sqrt{x+\sqrt{x}}+\frac{1}{4\sqrt{x+\sqrt{x}}} \end{aligned}$$

Az implicit deriváltak: $(\sqrt{xy})\prime = 1\prime$ azaz

$$\frac{y + x\frac{\partial y}{\partial x}}{2\sqrt{xy}} = 0$$

amiből $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-y}{x} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$. (Úgy is lehetne, hogy $\sqrt{xy} = 1$ jelentése: $y = x^{-1}$, ezért $y\prime = -x^{-2}$.)

Az $r = \partial p/\partial q$ jelöléssel: $\left(p^3 + 4pq - 3q^2\right)\prime = 0$, azaz $3p^2r + 4rq + 4p - 6q = 0$, azaz $\left(3p^2 + 4q\right) r = 6q - 4p$, azaz — mivel $p(p^2 + 4q) = 2 + 3q^2 > 0$ miatt $p \neq 0$, és következésképpen $3p^2 + 4q \neq 0$ hiszen $\left(3p^2 + 4q\right) p = 3p^3 + 4pq = 2 + 3q^2$ —

$$r = \frac{6q - 4p}{3p^2 + 4q} = \frac{(6q - 4p)\,p}{(3p^2 + 4q)\,p} = \frac{6pq - 4p^2}{3p^3 + 4pq} = \frac{6pq - 4p^2}{2 + 3q^2} = \frac{2p(3q - 2p)}{2 + 3q^2}$$

Mivel $\partial^2(a^2 + b^2)/\partial b^2 = 0$, azaz

$$\begin{aligned} & \partial(2a \cdot \partial a/\partial b + 2b)/\partial b \\ = \quad & 2\left(\frac{\partial a}{\partial b} \cdot \frac{\partial a}{\partial b} + a\frac{\partial^2 a}{\partial b^2} + 1\right) = 0 \end{aligned}$$

Ebből

$$\frac{\partial^2 a}{\partial b^2} = \frac{-1 - \left(\frac{\partial a}{\partial b}\right)^2}{a}$$

Itt $\partial(a^2 + b^2)/\partial b = 0$ miatt $2a\frac{\partial a}{\partial b} + 2b = 0$ adódik, tehát $\frac{\partial a}{\partial b} = \frac{-b}{a}$. Végezetül tehát

$$\frac{\partial^2 a}{\partial b^2} = \frac{-1 - \left(\frac{-b}{a}\right)^2}{a} = \frac{-(a^2 + b^2)}{a^3} = \frac{-c^2}{a^3}$$

A hiperbola egyenletét deriválva: $2x - 2yy\prime = 0$ azaz $y\prime = x/y = xy^{-1}$. Újra deriválva:

$$y\prime\prime = y^{-1} + x(-1)y^{-2}y\prime = y^{-1} - xy^{-2}xy^{-1} = \left(y^2 - x^2\right) y^{-3} = -1/y^3$$