Legyenek $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitív számok, tekintsük a számtani közepüket, azaz az

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

számot. Az a_i számok legkisebbikét jelölke $a_{\min}$, a legnagyobbat pedig $a_{\max}$. Ekkor fennáll a következő:

Számtani és mértani közép közti összefüggés: Ha $a_{\min} < a_{\max}$, akkor

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n < \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^n$$

Látható, hogy itt egyenlőség áll fenn, ha $a_{\min} = a_{\max}$. A baloldali szorzat n-edik gyökét szokás az $a_1, a_2, ..., a_n$ számok mértani közepének nevezni. Az elnevezés indoklására megemlítendő, hogy ha egy körben egy átmérőt egy húr merőlegesen metsz, akkor az átmérőből lemetszett darabok hosszának számtani közepe a kör sugara, a mértani közepe pedig a merőleges húr egyenlő darabjai.

A fenti egyenlőtlenséget indirekt módon bizonyítjuk. Tekintsünk egy olyan ellenpéldát, azaz olyan $a_1, a_2, ..., a_n$ számokat, ahol $a_{\min} < a_{\max}$, de a lehető legkevesebb a_i szám különbözik a számtani középtől, és feltesszük, hogy

$$a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^n$$

Jelölje $d_{\max}$ az $a_{\max}$ és a számtani közép különbségét, és jelölje $d_{\min}$ a számtani közép és az $a_{\min}$ különbségét. Vegyük észre, hogy $d_{\max}$ és $d_{\min}$ is pozitív. Közülük a kisebbiket jelölje d. Most az $a_{\min}$ számot cseréljük ki az $a_{\min} + d$ számra, az $a_{\max}$ számot pedig az $a_{\max} - d$ számra. Nyilván mindkettő pozitív lesz, és legalább az egyikük meg fog egyezni a számtani középpel. Ezáltal az új számok számtani közepe ugyanaz marad, de szorzatuk növekszik, hiszen

$$(a_{\min} + d)\,(a_{\max} - d) = a_{\min}a_{\max} + d(a_{\max} - a_{\min} - d) > a_{\min}a_{\max}$$

mert $a_{\max} - a_{\min} - d \geq d > 0$. Ellentmondásra jutottunk!

A számtani és mértani közép közti összefüggés alapján a következők teljesülnek:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 \cdot \frac{n+1}{n} \cdot ... \cdot \frac{n+1}{n} < \left(\frac{n + (n+1) + ... + (n+1)}{n(n+1)}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{1 + (1+\frac{1}{n}) + ... + (1+\frac{1}{n})}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

Ezért az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat szigorúan monoton növekszik. Másrészt ha $k = 1, 2, ..., n$, akkor fennáll

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$$

hiszen ez $k = 1$ esetén nyilvánvaló, nagyobb k értékek közül pedig tekintve a lehető legkisebb k egész számot, melyre

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \geq 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$$

állna fenn, azt kapnánk, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1} < 1 + \frac{k-1}{n} + \frac{(k-1)^2}{n^2}$$

és így osztás után

$$1 + \frac{1}{n} > \frac{1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}}{1 + \frac{k-1}{n} + \frac{(k-1)^2}{n^2}}$$

azaz

$$\frac{n+1}{n} > \frac{k^2 + kn + n^2}{1 - 2k + k^2 + kn + n^2 - n}$$

azaz

$$(n+1)\left(1 - 2k + k^2 + kn + n^2 - n\right) - n(k^2 + kn + n^2) > 0$$

ami pedig ellentmondana annak, hogy $(k-1)^2 < kn$. Mindazonáltal az a $k = n$ esetre azt nyerjük, hogy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3$. Van tehát egy szigorúan monoton növekvő és korlátos sorozatunk, ami kötelezően konvergens. A határértékét e-vel jelöljük, és *Euler-féle* számnak mondjuk. Világos, hogy

$$e > \left(1+\frac{1}{11}\right)^{11} > 2.6$$

Megmutatható az is, hogy e egy irracionális szám, és a pontos értéke 2.71828183 körül van. Most tetszőleges q pozitív egész számra:

$$\left(1+\frac{1}{nq}\right)^n = \sqrt[q]{\left(1+\frac{1}{nq}\right)^{nq}}$$

Ezért

$$\left(1+\frac{1}{nq}\right)^n \to \sqrt[q]{e}$$

és a sorozat szigorúan monoton növekvő. Ha most p egy pozitív egész szám, akkor a

$$\left(1+\frac{p}{nq}\right)^n$$

sorozat azon részsorozata, mely a p-vel osztható n-ekre van értve, az előző sorozat p-edik gyökének részsorozataként fogható fel. Ezért

$$\left(1+\frac{p}{nq}\right)^n \to \left(\sqrt[q]{e}\right)^p = e^{p/q}$$

Ez az összefüggés hatalmaz fel bennünket, hogy pozitív racionális x-ekre definiáljuk az

$$\exp(x)$$

függvényt úgy, mint e^x. Nullára és negatív racionális számokra pedig így definiálhatjuk a függvényt:

$$\exp(0) = 0$$

és

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

A definícióink egyenes következménye, hogy ha $x = p/q$, és p, q egészek, $q > 0$, akkor

$$\exp(x) = e^{p/q}$$

Most az exp függvény definícióját tetszőleges valós x számra kiterjeszthetjük: Ha egy racionális számokból álló monoton növő x_n sorozat határértéke x, akkor legyen

$$\exp(x) = \lim \exp(x_n)$$

Definícióink alapján könnyen megmutatható, hogy a mindenhol értelmezett exp függvény értékkészlete az összes pozitív valós szám, a függvény szigorúan monoton növekvő és folytonos is. Az inverze tehát létezik, az is szigorúan monoton növekvő lesz, de csak a pozitív számokon értelmezve. Az inverz függvény elnevezése: $\log(x)$. Használatosak még a $\log x$ és $\ln x$ vagy $\ln(x)$ jelölések is. Most már tetszőleges $a > 0$ valós számnak képezhetjük az x-edik hatványát az

$$a^x = \exp(x \log a)$$

képlettel. Ha $a > 1$, akkor az a^x függvény is folytonos és szigorúan monoton növő lesz, és az összes pozitív valós szám alkotja az értékkészletét. Ha $0 < a < 1$, akkor $a^x = (1/a)^{-x}$.

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor tehát az a^x függvény invertálható, és az inverzének szokásos elnevezése:

$$\log_a x$$

Ez is szigorúan monoton és folytonos függvény, pozitív számokot értelmezve. A fentiek alapján érvényesek a következő azonosságok:

$$\begin{aligned}
\log_a x &= \frac{\log x}{\log a} \\
\log e &= 1 \\
\log 1 &= 0 \\
\log \frac{1}{e} &= -1 \\
\exp(x) &= e^x \\
\exp(1) &= e \\
\exp(0) &= 1 \\
\exp(-1) &= \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

A következő határértékek is figyelemre méltók:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \exp(x) &= 0 \\
\lim_{x\to+\infty} \exp(x) &= +\infty \\
\lim_{x\to+0} \log(x) &= -\infty \\
\lim_{x\to+\infty} \log(x) &= +\infty
\end{aligned}$$

Mind az exp mind a log függvények differenciálhatók is:

$$\begin{aligned}
(\exp(x))' &= \exp(x) \\
(\log(x))' &= x^{-1}
\end{aligned}$$

Következésképpen exp második deriváltja mindenhol pozitív, a log függvény második deriváltja pedig mindenhol negatív.