Haladvány Kiadvány 2007.02.26.

Hujter Mihály: Egy-két érdekes azonosságról

(Készült a T047340 számú OTKA részbeni támogatásával)

Véletlenül találtam a következő azonosságot:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2+\sqrt{20}+\sqrt{\sqrt{320}-40}}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{20}+\sqrt{\sqrt{320}-40}}$$
$$=\quad\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}}$$

Tehát, ha

$$2c=\sqrt[3]{2+\sqrt{20}+\sqrt{\sqrt{320}-40}}$$

akkor c-nek és a reciprokának összege a számtani közepe:

$$\frac{1}{4}\sqrt{9+\sqrt{5}+\sqrt{30-\sqrt{180}}}$$

Az azonosságnak két érdekességét említem: Az első az, hogy $\sqrt{320}-40<0$, és ezért a négyzetgyökén $\pm i\sqrt{40-\sqrt{320}}$ értendő. Ebből következően mindegyik köbgyök komplex számként hatféle módon értelmezhető. Ebben az értelemben a képlet baloldalán látható összeg 36 módon is kiszámítható. Valójában a 36 értelmezés nem mutat ennyire nagy változatosságot, hiszen például a 36 összeg értékének halmaza $2\pi/3$ szöggel való 0 körüli elforgatással saját magába megy át a komplex számsíkon. A 36 módon képzett összegek 18 párba rendeződnek úgy, hogy az egy párba rendezettek ugyanazt az értéket adják. Mindez megfelel a komplex számsíkon a valós tengelyre vonatkozó szimmetriának. A valós tengely fölötti és alatti tagok szimmetriája a $+i\sqrt{40-\sqrt{320}}$ és $-i\sqrt{40-\sqrt{320}}$ szimmetriájából jön. A 18 összeg-érték közül a valós tengelyen 3 értéket találunk, és ezen 3 érték között egyetlen pozitívként kapjuk az állított azonosság jobb oldalát.

Összefoglalva: Az azonosságunkat úgy értjük, hogy a képletben $\sqrt{320}-40$ két komplex négyzetgyöke közül az egyiket választjuk (mindegy, hogy melyiket, de a másik esetben is ugyanazt), és a köbgyököt úgy értjük, hogy a köbgyök értékének valós része pozitív legyen.

Az azonosság másik érdekessége, hogy a jobb oldal értéke pontosan $4\cos\frac{\pi}{15}$, azaz a fenti számtani közép éppen $\cos\frac{\pi}{15}$. (A fentemlített valós összegek közül a másik kettő értéke egyébként pontosan $4\cos\frac{7\pi}{5}$ illetve $4\cos\frac{41\pi}{15}$.)

Ha tekintjük a $4\cos\frac{\pi}{15\cdot 2^k}$ számokat $k = 2, 3, \ldots$ esetén, akkor a fenti azonossághoz hasonló képleteket nyerhetünk. Például $k = 2$-re ezt kapjuk:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{\sqrt{40+\sqrt{320}}+\sqrt{\sqrt{320}-24}}}+\sqrt[3]{\sqrt{40+\sqrt{320}}+\sqrt{\sqrt{320}-24}}$$
$$=\sqrt{8+\sqrt{36+\sqrt{80}+\sqrt{480-\sqrt{46\,080}}}}$$

ha tekintetbe vesszük, hogy

$$4\cos\frac{\pi}{10}=\sqrt{10+\sqrt{20}}$$

és hogy

$$4\cos\frac{\pi}{30}=\sqrt{8+\sqrt{36+\sqrt{80}+\sqrt{480-\sqrt{46\,080}}}}$$

továbbá hogy

$$4\cos^3\alpha = 3\cos\alpha+\cos 3\alpha$$