Haladvány Kiadvány 2007.03.02.

Hujter Mihály: Egy maximumkeresési feladat

(Készült a T047340 számú OTKA részbeni támogatásával)

Pozitív a, b, c, d esetén tekintsük, az

$$f(x) = a\sqrt{1+bx} + c\sqrt{1-dx}$$

függvény maximumát $\frac{-1}{b} \le x \le \frac{1}{d}$ esetén. Elemi eszközökkel fogom bizonyítani, hogy

$$f(x) \le f(\xi)$$

ahol

$$\xi = \frac{a^2b^2 - c^2d^2}{bd\,(a^2b + c^2d)}$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $x = \xi$. Mármost

$$\frac{1}{d} - \frac{a^2b^2 - c^2d^2}{bd\,(a^2b + c^2d)} = \frac{c^2(b+d)}{b\,(a^2b + c^2d)} > 0$$

$$\frac{a^2b^2 - c^2d^2}{bd\,(a^2b + c^2d)} - \frac{-1}{b} = \frac{a^2(b+d)}{d\,(a^2b + c^2d)} > 0$$

ezért

$$\frac{-1}{b} < \xi < \frac{1}{d}$$

Egy érdekes speciális eset: $a = 2$, $b = c = d = 1$. Ekkor $\xi = \frac{3}{5}$. Az a tény, hogy ennél a ξ-nél van a(z egyetlen) maximum, azt jelenti, hogy

$$2\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \le 2\sqrt{1+\frac{3}{5}} + \sqrt{1-\frac{3}{5}} = \sqrt{10}$$

és itt csak $x = \frac{3}{5}$ esetén állhat fenn egyenlőség. Négyzetre emelve ez az állítás azt jelenti, hogy

$$\left(2\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)^2 \le 10$$

azaz

$$3x + 4\sqrt{1-x^2} \le 5$$

egyenlőséggel csak $x = \frac{3}{5}$ esetén. Itt a $3, 4, 5$ Püthagórászi számhármas azt súgja, hogy a $3, 4, 5$ számok helyére derékszögű háromszög oldalhosszai írhatók.

Az általános esetben azt kell megmutatnunk, hogy

$$\begin{aligned} & a\sqrt{1+bx)}+c\sqrt{1-dx} \leq f(\xi) \\ = \quad & \left(a^2\sqrt{\frac{b}{d}}+c^2\sqrt{\frac{d}{b}}\right)\sqrt{\frac{b+d}{a^2b+c^2d}} \end{aligned}$$

és hogy a kisebbegyenlőben egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $x=\xi$. Mindkét oldal nemnegatív, tehát a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$$\begin{aligned} & \left(a\sqrt{1+bx}+c\sqrt{1-dx}\right)^2 \\ \leq \quad & \left(a^2\sqrt{\frac{b}{d}}+c^2\sqrt{\frac{d}{b}}\right)^2\frac{b+d}{a^2b+c^2d} \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} & a^2+c^2+a^2bx-c^2dx \\ & +2ac\sqrt{(1+bx)(1-dx)} \\ \leq \quad & \frac{(b+d)\left(a^2b+c^2d\right)}{bd} \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} & \left(a^2+c^2+a^2bx-c^2dx\right)bd \\ & +2abcd\sqrt{(1+bx)(1-dx)} \\ \leq \quad & (b+d)\left(a^2b+c^2d\right) \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} & 2abcd\sqrt{(1+bx)(1-dx)} \\ \leq \quad & (b+d)\left(a^2b+c^2d\right)-\left(a^2+c^2+a^2bx-c^2dx\right)bd \\ = \quad & a^2b^2(1-dx)+c^2d^2(1+bx) \end{aligned}$$

A jobboldal nemnegatív lévén újra szabad négyzetre emelni:

$$\begin{aligned} & 4a^2b^2c^2d^2(1+bx)(1-dx) \\ \leq \quad & \left(a^2b^2(1-dx)+c^2d^2(1+bx)\right)^2 \end{aligned}$$

azaz

$$4a^2b^2c^2d^2(1+bx)(1-dx)-\left(a^2b^2(1-dx)+c^2d^2(1+bx)\right)^2 \leq 0$$

azaz

$$-\left(-a^2b^2+c^2d^2+a^2b^2dx+bc^2d^2x\right)^2 \leq 0$$

Ez nyilván teljesül, és egyenlőséggel akkor és csak akkor, ha

$$-a^2b^2+c^2d^2+a^2b^2dx+bc^2d^2x=0$$

azaz ha

$$x = \frac{a^2b^2 - c^2d^2}{bd\,(a^2b + c^2d)}$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.