Haladvány Kiadvány 2007.03.11.

Hujter Mihály: Ötödik háromszög, hatodik négyszög

(Készült a T047340 számú OTKA részbeni támogatásával)

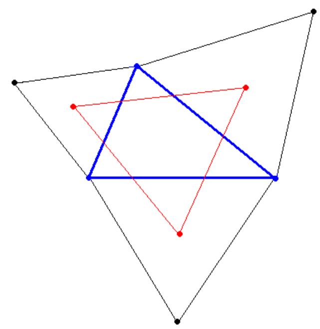
Ezt at írást a „*Tudományos emlékülés dr.* Kárteszi Ferenc *professzor születésének 100. évfordulója alkalmából*” című rendezvény ihlette. A rendezvényre 2007. március 9-én az Eötvös Loránd Tudományegyetem Budapest, Pázmány Péter sétány 1/c című épületében a Kárteszi Ferenc nevét viselő 0.220 számú tanteremben került sor. A rendezvényt az ELTE TTK Matematikai Intézet szervezte, és *Lovász László* professzor elnökölte. Méltató szavai után *Horváth Jenő* professzor Kárteszi Ferenc életéről és didaktikai munkásságáról beszélt. Majd megnéztük *Staar Gyula* interjú-filmjét, amit Feri bácsival, annak nyolcvanadik születésnapján készített. Ezek után *Szőnyi Tamás* professzor ismertette Kárteszi tanár úr — „*Feri bácsi*” — matematikai eredményeit.

A szegényparaszt családban a kisebbik fiú 1907. február 13-án született, de nem Cegléden — ahogyan a lexikonok írják —, hanem a Ceglédhez közeli Nyilasbesnyő tanyán. A húszas évek végén járt egyetemre Budapesten, ahol — többek közt — Kőnig Dénes is a tanára volt, és tőle gráfelméletet is tanult. Az egyetemi diplomát 1930-ban, a doktorátust 1933-ban szerezte. Szakmai fejlődésére — annak korai haláláig — testvérbátyja is nagy hatással volt.

Mivel Győrben, a Révai Gimnáziumban éppen 1931-ban üresedett meg egy matematika tanári állás, Kárteszi Ferenc oda került tanárnak, és ott maradt 1940-ig, amikor kutatói ösztöndíjjal Itáliába került Segre professzorhoz. A háború során Kárteszinek sokat kellett katonáskodnia, így aztán nem került vissza Győrbe. A háború után Budapesten a felsőoktatásban és a sportéletben is vezető szerepet játszott. Geometriai könyvei népszerűek lettek. Feri bácsi fiatallal kedveltette meg a kombinatorikus mértan szépségeit — köztük a jelen sorok szerzőjével is.

A Győrben töltött ifjú tanári évek meghatározók voltak Kárteszi életében és munkásságában. Az — egyébként győri születésű — Középiskolai Matematikai Lapokban sok jó feladata, írása jelent meg. Ezekről a folyóirat a legfrissebb számban megemlékezik.

Tehát Kárteszi Ferenc egy évszázada született és egy évtizedet töltött Győrben. Kétszáz éve viszont Győrben járt Napóleon. Igaz, a császár nem egy évtizedet, hanem csak egyetlen éjszakát töltött ott. Viszont a matematika története kapcsán Napóleon és Kárteszi nevét mégis csak egy lapon kell említeni.



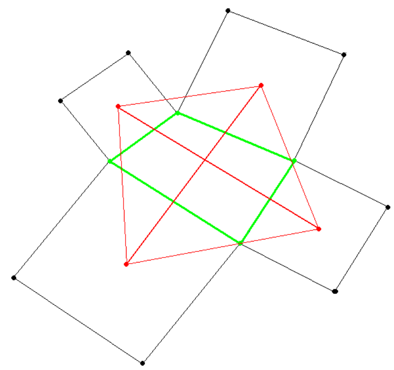
Napóleon neve legalább három ponton kapcsolódik a matematika történetéhez. Egyrészt ismeretes *Monge* híres matematikusnak Napóleonhoz fűződő kapcsolata. Másrészt a csak körzővel való szerkesztések kapcsán is említeni szokták Napóleon nevét. Állítólag a csatái előestéjén a hadvezér a térképek fölé hajolva körzővel tervezgette a hadműveleteket. Így vette volna észre, hogy nincs szüksége vonalzóra, mert csak körzővel is el tud végezni olyan szerkesztéseket, mint — mondjuk — egy szakasz felezése, vagy egy háromszög súlypontjának a megkeresése.

A harmadik kapcsolat a nevezetes *Napóleon-tétel*: Tekintsünk egy háromszöget és mindegyik háromszögoldalhoz kifelé szerkesszünk egy-egy szabályos háromszöget. Csak körzővel könnyen elvégezhető ez a szerkesztés, sőt a szabályos háromszögek középpontjának megszerkesztéséhez sem kell elővenni a vonalzót. Napóleon — állítólag — maga vette észre, hogy *a szabályos háromszögek középpontjai újfent csak szabályos háromszöget alkotnak*! (Ez az igazság még akkor sem nyilvánvaló, ha a kiindulási háromszög szakasszá fajul.) Tehát Napóleon első háromszöge tetszőleges, a második, a harmadik és a negyedik szabályos, és a tétel következtében az ötödik is szabályos.

A Napóleon-tételre számos bizonyítás ismert. Az internetről könnyen beszerezhető akárhány. Egy, a Napóleon-tételhez hasonló észrevételt tett Kárteszi Ferenc is: *Kiindulva egy négyszögből ne szabályos háromszögeket, hanem négyzeteket szerkesszünk kifelé.* Ha nincs körzőnk, derékszögű–negyvenötfokos vonalzó is elég a szerkesztéshez. Nyilván a négyzetek középpontját is megszerkeszthetjük csak vonalzóval.

Nem csoda, hogy *a négy négyzetközéppont négyszöget alkot.* De az már talán meglepő, hogy *az új négyszög két átlója egyenlő hosszú és merőleges egymásra.* Sőt, ha a régi négyszög paralelogramma, akkor az új négyszög négyzet. Ez Kárteszi Ferenc tétele. Kárteszi hat négyszöget tekint tehát. Az első tetszőleges, a másodiktól az ötödikig mindegyik négyzet, és a tétel állítása szerint a a hatodik is *kvázi-négyzet*, azaz átlói egyenlő hosszúak és merőlegesek. Ha az első négyzet szemközti szögei egyenlők, akkor a hatodiké is, éspedig mind derékszögek.

Az igazság az, hogy nem túl nehéz feladat Kárteszi tételének a bizonyítása vektorokkal, vagy koordinátarendszerben, vagy — ha ahhoz van kedvünk — a komplex számsíkon. Még a vak ember is láthatja például a következő bizonyítás



helyességét:

A komplex számsíkon a régi négyszög egyik csúcsa legyen -1, az átellenes pedig legyen 1. A másik két csúcsot jelölje az $x-1$ és az $y+1$ komplex szám. Pozitív körbenjárás szerint tekintjük így a csúcsokat. Az oldalakhoz kifelé rajzolt négyzetek középpontját ki tudjuk fejezni komplex számként: Jelölje p a következő komplex számot: $(1-i)/2$. Ekkor a -1 és $x-1$ közötti oldalhoz kifelé rajzolt négyzet középpontja: $xp-1$. Hasonló okból a szemközti négyzet középpontja: $yp+1$. Az utóbbiból az előbbit levonva az új négyszög egyik átlójára ezt nyerjük: $2+(y-x)p$. Az eredeti négyszög másik két oldala, mint komplex szám: $1-(x-1)=2-x$ és $-1-(y+1)=-2-y$. Ezért a hozzájuk kifelé rajzolt négyzet középpontja: $-1+x+(2-x)\,p$ illetve $1+y+(-2-y)\,p$. Mindazonáltal az új négyszög másik átlója:

$$\begin{aligned} & 1+y+(-2-y)\,p-(-1+x+(2-x)\,p) \\ = \quad & 2-x+y+(-4+x-y)p \end{aligned}$$

Az új négyszög két átlójának a hányadosa:

$$\begin{aligned} & \frac{2-x+y+(-4+x-y)p}{2+(y-x)p} \\ = \quad & \frac{4-2x+2y+(-4+x-y)(1-i)}{4+(y-x)(1-i)} \\ = \quad & \frac{(4-x+y)i-x+y}{4-x+y+(x-y)i}=i \end{aligned}$$

Tehát az új négyszög két átlója valóban egyenlő hosszú, és merőleges egymásra. Abban a speciális esetben, amikor az eredeti négyszög paralelogramma, akkor (és csak akkor) $x+y=0$. Ilyenkor az új négyszögben az első átló felezőpontja:

$$\frac{(xp-1)+(yp+1)}{2}=\frac{p(x+y)}{2}=0$$

Hasonlóképpen a másik átló felezőpontja:

$$\frac{-1+x+(2-x)\,p+(1+y+(-2-y)\,p)}{2}=\frac{(1-p)(x+y)}{2}=0$$

Ebben a speciális esetben tehát az új négyszög átlói nemcsak egyenlő hosszúak és merőlegesek egymásra, hanem még felezik is egymást, és éppen az eredeti parallelogramma középpontjában. Ez azt jelenti, hogy az új négyszög egy négyzet, amely koncentrikus az eredeti paralellogrammával. Sőtmitöbb, a négyzet egyik oldala:

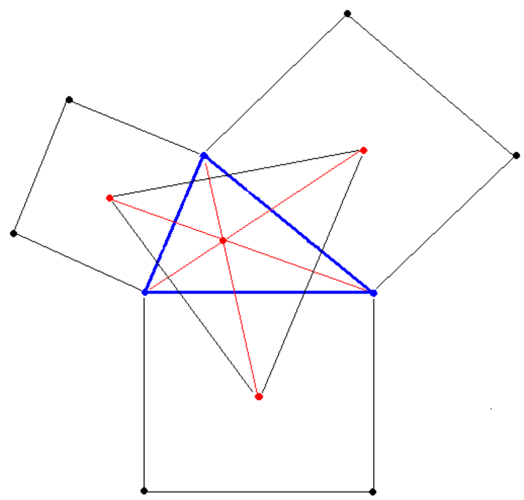
$$\begin{aligned} & (1 + y + (-2 - y)\,p) - (xp - 1) \\ = \;& 2 + y - 2p - (x + y)p = 2 - x - 2p = 2 - x - (1 - i) \\ = \;& 1 - x + i \end{aligned}$$

Ez azért is érdekes, mert a paralelolgramma egyik csúcsa ez volt: $1 - x$; a paralogrammának pozitív irány szerinti előző csúcsa pedig a középpontból derékszöggel pozitív irányba elforgatva éppen i. Szavakkal: az utolsó négyzet egyik oldalát, mint vektort, úgy kaphatjuk meg, hogy a parallelogrammát tekintve a középpontból elforgatjuk az egyik csúcsot derékszöggel, és hozzáadjuk a középpontból a paralelogramma következő csúcsába mutató vektort. Olyan két vektor összegéről van tehát szó, mely vektorok skalárszorzata éppen a paralelogramma területének negyedét adja. Ebben az értelemben az hatodik négyszögként keletkezett négyzet és az eredeti parallelogramma területe úgy viszonyul egymáshoz, mint a paralelogramma oldalvektoraiból képzett számtani és mértani közép négyzete. (A közepeket az egyik oldalvektor és a másik merőleges elforgatottja között értelmezzük a vektorok szokásos össeadásával és skalárszorzattal.)

Nem érdektelen Kárteszi tételének azzal a speciális esetével foglalkozni, amikor az eredeti négyszög négy oldala közül az egyik nulla hosszúságú, azaz a négyszög valójában egy háromszög. Mivel a nulla hosszúságú szakaszt bármelyik háromszögcsúcsnál tekinthetjük, ezért az „új négyszög” átlóiként összesen 6 szakaszt nyerünk. Ezek közül 3 egy háromszöget határoz meg — az eredeti háromszöghöz hozzáírt négyzetek középpontja által meghatározottat — a másik 3 szakasz pedig pedig ennek az új háromszögnek a 3 magasságvonala. Mivel a magasságvonalak egy ponton mennek át, megkapjuk Kárteszi tételének egy gyönyörű következményét: *Ha a Napóleon-tételhez hasonlóan, de nem szabályos háromszögeket, hanem négyzeteket rajzolunk a háromszög oldalaihoz kifelé, akkor a négyzetek középpontját az eredeti háromszög szemközti csúcsával összekötve egy ponton átmenő egyenesekhez jutunk.*

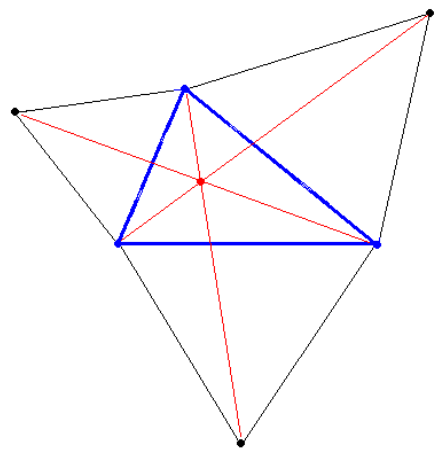
Ugyanezt másképpen is megfogalmazhatjuk: *Ha egy háromszög magasságvonalait meghosszabbítjuk a talpponton túlra a merőleges háromszögoldal hosszúságára, akkor az új végpontok közül kettő-kettő a harmadik magasságvonal ellenkező végével egy-egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget alkot, derékszöggel az utolsóként említett pontnál.*

El kell mondanunk, hogy a Napóleon-tétellel kapcsolatban is igaz egy hasonló állítás. Kiindulva egy háromszögből most ne a három magasságvonalat tekintsük, hanem a három úgynevezett *Simpson*-szakaszt. (Az egyszerűség kedvéért olyan legyen a kiindulási háromszög, hogy a legnagyobb szöge is kisebb legyen $2\pi/3$-nál, azaz 120 foknál. Egy ilyen háromszög belsejében tekintsük — a létező és egyértelműen meghatározott — *izogonális* pontot, tehát azt, melyből minden



háromszögoldal $2\pi/3$ szög alatt látszik. Az izogonális pont másik ismert neve: *Fermat–Torricelli pont.* Torricelli — akit a 760 higanymilliméter tett híressé — a 17. század első felében megoldotta Fermat problémáját, és bebizonyította, hogy az izogonális pont az, melyből a kiindulási háromszög csúcsainak össztávolsága minimális. Jelölje d ezt az össztávolságot. A három Simpson-szakasz az, mely egyik végpontja a háromszög egy-egy csúcsa, a Simpson-szakaszok egyformán d hosszúságúak, és a belsejükben tartalmazzák az izogonális pontot. Következésképpen a 3 Simpson-szakasz egyenlő hosszú — akárcsak Napóleon ötödik háromszögének oldalai, és a Simpson-szakaszok páronként $\pi/3$ szöget zárnak be egymással, akárcsak Napóleon ötödik háromszögének oldalai. Ami bennünket érdekel, az az a tény, hogy a fenti — a magasságvonalak meghosszabbítására vonatkozó — állítás alábbi megfelelője is igaz: *Ha egy izogonális belső ponttal bíró háromszöghöz felvesszük a Simpson-szakaszokat, akkor azok háromszögön kívüli pontjai páronként a harmadik háromszögcsúccsal egy-egy szabályos háromszöget alkotnak.*Tehát éppen Napóleon második, harmadik és negyedik háromszögét kaptuk! A Simpson-szakaszok említett tulajdonsága a *Ptolemájosz*-tétellel van kapcsolatban, hiszen az izogonális pont a Napóleon-féle második, harmadik és negyedik háromszöggel együtt egy-egy húrnégyszöget alkot, és így — mondjuk a második háromszöget tekintve — a második háromszögnek nem az első háromszögön lévő csúcsa éppen akkora távolságra van az első háromszög izogonális pontjától, mint az első és második háromszög két közös csúcsától mért távolságok összege (ez következik a Ptolemájosz-tételből). Így az első és a második háromszög nem közös csúcsainak távolsága éppen d, és az összekötő szakasz átmegy az első háromszög izogonális pontján.

Érdemes összehasonlítani Kárteszi meghosszabbított magasságvonalainak és a Simpson-szakaszoknak a tulajdonságait. A meghosszabbított magasságvonalak közül kettő külső végpontjából a harmadik belső végpontja $\pi/2$ szög alatt látszik. A Simpson-szakaszok mindegyik külső végpontjából pedig két-két belső



végpont látszik $2\pi/3$ szög alatt. A meghosszabbított magasságvonalak a rájuk merőleges — azaz $\pi/2$ szöget bezáró — háromszögoldallal egyenlő hosszúságúak, a Simpson-szakaszok pedig egymással, és a Simpson-szakaszok egymással is zárnak be egyenlő szöget. Ha a Simpson-szakaszokat a belső végponttól a külső felé irányítjuk, akkor az általuk páronként bezárt szög: $2\pi/3$.

Írásunk címét tekintve érdemes lenne megvizsgálni, hogy a Napóleon- és Kárteszi-tételhez hasonlóan van-e értelemes „*hetedik ötszög*” jellegű tétel, azaz milyen szimmetria-tulajdonságokkal bír egy olyan ötszög, melyet olyan öt szabályos-ötszög-középpont alkot, mely szabályos ötszögeket egy kiindulási — de tetszőleges — ötszög oldalaihoz kifelé szerkesztünk.