**Haladvány Kiadvány 2007.03.26.**

# Mesék a valószínűségszámításból

*Szalkai István, Veszprém*
szalkai@almos.uni-pannon.hu

Néhány klasszikus feladatot jókedvű mesébe burkoltunk, így a tapasztalatok szerint a diákok veszik a lapot, matekórán még nevetni is szoktak. A feladatokat témák szerint csoportosítottuk, nem feltétlenül az elején vannak az érdekesek és a végén az unalmasak.

Köszönet **Tarján Klára** kolléganőmnek az ötletekért!

## Eseményalgebra, elemi feladatok

**(E1)** Jelölje A azt az eseményt hogy a *meleg*, míg B azt hogy *hideg* csapot nyitottuk meg.
**a)** Mit jelent $A+B$ illetve $A{\cdot}B$ ?
**b)** Írja le A és B közötti műveletekkel azt, hogy *tűzforró, megtelt a kád, üres, langyos,* .... .
**c)** Jelölje C azt, hogy a *lefolyódugót* is kihúztuk. Folytassa.

**(E2)** Három vadász 0.7, 0.5 ill. 0.9 eséllyel találja el a vadat. Mekkora esélye van a disznónak?

**(E3)** Egy hallgató két helyre adja be pályázatát, ahol egymástól függetlenül *0,4 - 0,4* valószínűséggel utasítják el. Mennyi az esélye, hogy legalább az egyik pályázatát elfogadják?

**(E4)** A *Catan telepesei* játékban miért kisebb pár számkártya, azaz állítólag kisebb valószínűségű a két kocka összege? (Azaz két/három/... kockadobás összegének eloszlása.)
Ld. még: **[1999c]**, **[www]** és **[MG]**.

**(E5)** Ha fiúk és lányok születéseinek esélye $p$ ill. $q=1-p$ , egymástól (és az apától is) függetlenül, akkor egy kétgyermekes családban melyiknek nagyobb az esélye: *azonos* vagy *különböző* neműek a gyermekek?
(Hívjuk fel a diákok figyelmét az érdekességre: az <u>azonos</u> nemű gyerekek esélye a $(p-q)^2 > 0$ egyenlőtlenség és nem az apa miatt nagyobb, tetszőleges $p \neq ½$ esetén.)

**(E6)** Az *5-fabatkás* pénzérme $p = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}$ valószínűséggel fej, míg *1-p* valószínűséggel írás.
**a)** Az érmét háromszor feldobva mekkora valószínűséggel lesz a három dobás azonos (csak 3 fej vagy csak 3 írás) ?
**b)** Kétszer feldobva mekkora valószínűséggel kapunk 1-fej -1-írást ? (Sorrend nem számít!)
(Hívjuk fel a diákok figyelmét: $P(a)= ½$ és $P(b)= {}^1/_3$ miatt a fabatka egymaga helyettesíthet mind egy normális, mind egy ${}^1/_3$ esésű érmét is! Ld. még: **[1993]** és **[1995b].**

**(E7)** Tegyük fel. hogy minden héten a beérkezett érvényes lottószelvények száma 2 millió. Mennyi az esélye, hogy 20 egymás utáni héten át nincs öttalálatos lottószelvény ?

**(E8)** Egy kísérletnél azt tapasztalták, hogy annak az esélye, hogy egy állat vírusfertőzésben megbetegszik 0,1. Melyik eseménynek nagyobb a valószínűsége: 20 állatból legfeljebb 2 betegszik meg, vagy 10 állatból legfeljebb 1 betegszik meg, ha az állatok egymástól függetlenül betegszenek meg?

**(E9)** Az év 365 napján ugyanolyan valószínűséggel születnek az emberek. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 4 tetszőlegesen kiválasztott ember közül mindenki más napon született ?

## Geometriai valószínűség

**(G1)** Mari és Józsi a könyvtárban beszél meg randevút. Elfoglalt emberek lévén csak annyiban tudnak megállapodni: délután 3 és 4 között mindenképpen beugranak, de nem lehet tudni, mikor, valamint legfeljebb csak 10 percig tudnak várni. Mennyi *P(találka)* = ?

**(G2)** Egy *1 m* -es léc véletlenül két helyen eltört. Mekkora eséllyel
**a)** lesz mindegyik darab leglább 2dm hoszú,
**b)** lehet az így keletkezett három szakaszból háromszöget szerkeszteni ?

**(G3)** Adjuk meg a céltáblára lövés középponttól való távolságának eloszlását!

## Bayes tétele

**(B1)** **Piroska** sétái során 10%, 25% és 65% gyakorisággal választ azt erdei ösvény, földút és autóbuszjárat között, ahol rendre 80%, 60% és 5% eséllyel találkozik a **Farkassal**.
**a)** $P$(Hamm) = ?
**b)** Megérkezve Nagymamához csak annyit rebeg mosolyogva, hogy *"a földúton jöttem"* . Milyen eséllyel hihet neki a Nagyi ?

**(B2)** A fiókok méretei alapján reggelente (álmosan) 50%, 32% és 18% eséllyel húzok ki zoknit a saját, feleségem ill. fiam fiókjából, melyekben átlagosan 90%, 73% ill. 14% a rám méretes pár.
**a)** mekkora valószínűséggel nem késem el munkahelyemről ?
**b)** ha nem jön fel, akkor mekkora eséllyel húztam a fiam fiókjából ?

**(B3)** Az áruház liftjei 0,13; 0,21 ill. 0,09 valószínűséggel *romlanak el*, és az utasok rendre 60%, 16% és 24% esetben választják őket.
**a)** Mi a valószínűsége annak, hogy egy vásárló *akadálytalanul* feljut az emeletre ?
**b)** Ha *segítségkérést* hallunk, akkor az mekkora valószínűséggel jön a második liftből?
**c)** Az *emeleten tartózkodó* vásárló mekkora valószínűséggel használta az első liftet?

**(B4)** Egy patkány négy labirintus bármelyikébe egyenlő eséllyel fut be. Annak a valószínűsége, hogy 3 perc alatt kijut belőlük, rendre 0,6; 0,3; 0,2 és 0,1 .
**a)** Mekkora valószínűséggel bukkan ki 3 perc múlva ?
**b)** Ha még nem bújt ki, mi a valószínűsége annak, hogy a negyedikben rekedt?

**(B5)** Négy termelőtől szállítják az alma/tej/stb. 1/10; 1/4; 2/5; illetve 5/20 részét, melyeknek rendre 40%; 50%; 20%; illetve 90%-a hibátlan.
a) Mekkora valószínűséggel kapok jó almát?
b) Ha ütődöttet kapok, mekkora valószínűséggel származik az első termelőtől?

**(B6)** Egy városban a lakosság fele férfi fele nő, járvány esetén a nők 30% míg a férfiak 20% eséllyel betegszenek meg. A kórházban levő betegek hány % -a férfi ?

## Szemléltetések:

**Diszkrét val.vált.:** **Kukori** tojáshozama,
**Folytonos:** **Riska** tejhozama.
**Várható érték**: Két statisztikus az erdőben lő: egyikük jobbra téveszti el a célt *1m* -rel, másikuk balra. *"Hurrá! Eltaláltuk!"*

## Diszkrét eloszlások

**(D1)** Esténként hazatérve **Arisztid** 0,35 valószínűséggel tudja a kulcsot a zárba illeszteni, egymás utáni próbálkozásai egymástól függetlenek. Mi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb 9 próbálkozás után bejut a lakásba?

**(D2)** A vizsga átlagosan a hallgatók 15% -ának nem sikerül. Mekkora eséllyel lesz elég hét vizsgalehetőség ?

**(D3)** A *"Ki nevet a végén"* ("Man ich ärgere dich nicht") társasjátékot az kezdi, aki két kockával dobva legalább az egyik hatos. Mekkora valószínűséggel lesz elegendő ehhez legfeljebb 4 dobás? Adja meg $\xi$ eloszlását, várható értékét és szórását!

## Poisson eloszlás

**(P1)** Egy 1 kg-os húsvéti kalácsba 50 szem mazsolát tettünk, majd 10 dkg-os szeletekre vágtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott szeletben 7 szem mazsola van ?

**(P2)** Augusztusban az egy óra alatt megfigyelt hullócsillagok száma átlagosan 11, Poisson eloszlást követ. Mennyi az esélye annak, hogy 15 perc alatt legfeljebb 2 hullócsillagot látunk ?

**(P3)** Egy szövetanyagon 10 méterenként átlagosan 6 hiba van, a hibák száma Poisson eloszlást követ. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy 4m szakaszon 3-nál kevesebb hiba van?

**(P4)** Egy 1000 palack készítésére elegendő üvegmasszában 300 kavics volt. Mi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott üvegben legalább 2 kavics van?
**(P5)** Évente átlagosan 3 féltégla esik fejemre. Mekkora valószínűséggel úszom meg a mai napot?

## Exponenciális eloszlás

**(e1)** Ha az izzók átlagos élettartamát 100 órának és élettartamuk eloszlását exponenciálisnak tételezzük fel, akkor mekkora eséllyel használhatjuk a frissen vásárolt égőt legalább 70 óráig?
**(e2)** Annak az esélye, hogy egy benzinkútnál a tankolásra 6 percnél többet kell várni 0,3. Adjuk meg azt az időt, amin belül 0,9 eséllyel sorra kerülünk, ha a várakozási időt *exponenciális* eloszlású!

## Normális eloszlás

**(N1)** A Balaton szeletek névleges töltési tömege 31 ± 6 gr. Mekkora valószínűséggel lesz egy szelet tömege legalább 29 gr ? (Ugyanez kristálycukorral, stb.)
**(N2)** A valódi és a megjósolt hőmérséklet *eltérése* normális eloszlást követ (-2,4) paraméterekkel. Ha a meteorológus " 22C " -t jósol, akkor mekkora valószínűséggel lesz a holnapi hőmérséklet 20 és 24 C között ?
**(N3)** A tapasztalat szerint a kenyérgyárban gyártott 1 kg-os kenyér tömege normális eloszlású, 100 dkg várható értékkel. Mekkora a szórás, ha a kenyerek 99%-a 102 dkg-nál könnyebb?
**(N4)** A húszéves férfiak magassága N(190,11cm) normális eloszlású. Mekkora eséllyel találunk közöttük 180 cm -nél magasabb férfiakat ?

**[MG]** szerint:

$$\Phi(x) \approx \tfrac{1}{2} + \mathrm{TANH}(0.8*x)/2 \approx$$
$$\approx \tfrac{1}{2} + {}^{2}/_{5}x - {}^{32}/_{375}x^3 + {}^{1024}/_{46875}x^5 - {}^{139264}/_{24609375}x^7 + {}^{8126464}/_{5537109375}x^9 \approx$$
$$\approx 0.5 + 0.4x - 0{,}085333x^3 + 0{,}021845x^5 - 0{,}005659x^7 + 0{,}001468x^9 ,$$

$$\varphi(x) \approx 0.4/\mathrm{COSH}^2(0.8*x) \approx$$
$$\approx {}^{2}/_{5} - {}^{32}/_{125}x^2 + {}^{1024}/_{9375}x^4 - {}^{139264}/_{3515625}x^6 + {}^{8126464}/_{615234375}x^8 - {}^{2898264064}/_{692138671875}x^{10} \approx$$
$$\approx 0.4 - 0{,}256x^2 + 0{,}1092267x^4 - 0{,}03961287x^6 + 0{,}0132087x^8 - 0{,}0041874x^{10}$$

## Hivatkozások

**[1993]** Szalkai,I.,Velleman,D.J.: *Versatile Coins* , Amer.Math.Monthly 100 (1993) pp.26-33
**[1995b]** Szalkai,I., Velleman,D.J.: *Rugalmas pénzérmék*, Matematikai Lapok, 1992/3-4 kötet (1995), 23-38. old.
**[1999c]** Szalkai,I.: *Egymásba ágyazott FOR-ciklusok alkalmazása*, Polygon, IX (1999) 55-58.
**[MG]** Robin,A.C.: *A quick approximation to the normal integral*, The Math. Gazette vol 81 (1997) March, pp.95-96.
**[www]** http://www.szt.vein.hu/~szalkai **Valószínűségszámítás** fejezet