Haladvány Kiadvány 2007.12.27.

Szalkai István: Egyenesektől való távolságokról

A KöMal 2005. januári számában jelent meg az alábbi probléma:

B.3788. *Adott az* ABC *háromszög. Mi azon* P *pontok mértani helye a háromszög belsejében, amelyeknek az* AB *oldal egyenesétől mért távolsága számtani közepe a* BC *és a* CA *oldalak egyenesétől mért távolságának?*

Mivel hasonló feladatokkal rendszeresen találkozhatunk, vizsgáljuk meg a problémát kissé általánosabban is:

ÁLTALÁNOSÍTOTT PROBLÉMA:

Legyenek adottak a síkon az $e_1,...,e_n$ *tetszőleges egyenesek, továbbá az* $\alpha_1,...,\alpha_n$, c *tetszőleges valós számok,* $c \geq 0$. *Keresendő azon* P *pontok mértani helye, amelyekre*

$$\alpha_1 \cdot d_1 + ... + \alpha_n \cdot d_n = c \tag{1}$$

ahol d_i *jelöli a* P *pontnak az* e_i *egyenestől való távolságát.* $\square$

Mint "megszállott" koordinátageometria-rajongó, gondolkodás nélkül (!) azonnal a Hesse képlet jut eszembe:

Hesse: *A* $P(x_0, y_0)$ *pont* előjeles *távolsága az* $Ax + By = C$ *egyenestől*

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 - C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad ,$$

ahol d előjele aszerint pozitív vagy negatív, hogy P az egyenes által meghatározott félsíkok közül abban van-e, amerre az (A, B) *normálvektor mutat.* $\square$

A képletet általában csak röviden $d = \left|\frac{Ax_0+By_0-C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$ alakban idézik, azonban nekünk most szükségünk van az abszolútértékek felbontására.

A (1) feltétel tehát így írható:

$$\sum_{i=1}^{n}(\pm\alpha_i) \cdot \frac{A_i x + B_i y - C_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} = c$$

azaz

$$x \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(\pm\alpha_i) \cdot A_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} + y \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(\pm\alpha_i) \cdot B_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} = c + \sum_{i=1}^{n} \frac{(\pm\alpha_i) \cdot C_i}{\sqrt{A_i^2 + B_i^2}} \tag{2}$$

attól függően, hogy P éppen az egyenesek által meghatározott síkrészek közül melyik (véges vagy végtelen) síkrészben van (ezt mutatja α_i előjele).

A **végeremény** pedig azonnal látszik: *minden* síkrészben egy-egy egyenesdarab (szakasz vagy fél- vagy egész- egyenes), amely egyenesdarabok a síktartomány egyik határától másik határáig terjednek – sem több, sem kevesebb. Az egyenesdarabok zártak, azaz a síktartomány határával való metszetük is a mértani hely része. Pontosabban lehetnek olyan síktartományok is, melyek üresek - nincs bennük egyetlen pont sem. □

De ez nem szép megoldás, és nem adja meg az egyenesdarabok jellemzésését sem.

Az *általános* problémától nem is várom el, hogy csak elemi geometriai teljes és egyszerű diszkussziót találjon. Pár egyszerű, általában is hasznos észrevételt azonban találtam.

Állítás: Ha P_1 *és* P_2 *mindketten kielégítik a* (1) *feltételt (azaz elemei a mértani helynek), ugyanabban a síkrészben vannak,* akkor *a* P_1P_2 *egyenesnek a megadott síkrészbe eső teljes darabja (a* P_1P_2 *szakaszon túli része is, egészen a síkrész határáig) a mértani helynek része.*

Vigyázzunk: az állításból *nem* következik, hogy a mértani hely minden síkrészben *legfeljebb* csak egy egyenes(darab)! Miért nem lehet több szakasz is? Sajnos (2) nélkül nem tudom.

Bizonyítás: Egyszerűen csak a párhuzamos szelők tételét kell alkalmaznunk. Jelölje $d_i^{(1)}$ és $d_i^{(1)}$ a P_1 illetve a P_2 pontoknak az e_i egyenesektől való távolságait. Ha a P pont $u : v$ arányban osztja a P_1P_2 szakaszt (ha nem belül van, akkor u és v közül valamelyik negatív), akkor P -nek az e_i egyenestől való távolsága

$$d_i = \frac{v \cdot d_i^{(1)} + u \cdot d_i^{(2)}}{u+v} \quad ,$$

a feltételek szerint

$$\alpha_1 \cdot d_1^{(1)} + ... + \alpha_n \cdot d_n^{(1)} = c \quad ,$$
$$\alpha_1 \cdot d_1^{(2)} + ... + \alpha_n \cdot d_n^{(2)} = c$$

és a fenti egyenletek $\frac{v}{u+v}$ illetve $\frac{u}{u+v}$ -szereseit összeadva éppen a (1) feltételt kapjuk. □

A fenti állítás egyébként még hasznunkra is válhat: mindössze csak a síkdarabok határain, vagyis az egyenesek szakaszain kell a mértani hely pontjait megkeresnünk, és a fenti állítás szerint az őket összekötő szakaszok alkotják a (teljes) mértani helyet. □

Geometriailag az a legérdekesebb, hogy az egyes esetekben milyen alakzatok jönnek ki.

Már $n = 2$ esetén is a teljes diszkusszió kellemes hétvégi (Kömal) feladat, ízelítőül pár gondolat.

Legyen az egyenesek metszéspontja M (a párhuzamos esettel most nem foglalkozunk). A mértani hely mindenképpen M -re (középpontosan) szimmetrikus alakzat.

Ha $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, akkor $c = 0$ esetén nyilván csak az M pont a mértani hely.

Tehát $c > 0$. Ekkor α_1, $\alpha_2 > 0$ miatt M középpontú paralelogrammát kapunk, melynek csúcsai M -től c/α_2 illetve c/α_1 távolságra vannak.

Ha $\alpha_1 > \alpha_2$ és $c = 0$ akkor M -re illeszkedő két, egymásra merőleges egyenes (azaz négy félegyenes) a mértani hely.

Ha $\alpha_1 > \alpha_2$ és $c > 0$ akkor e_1 egyenesen nincs pontja a mértani helynek, míg e_2 egyenesen két pontot könnyen megtalálunk: M -től c/α_1 távolságra vannak amiket jelöljünk Q_1, Q_2 -vel. E két pontból kiinduló félegyeneseket kapunk mértani helyként, melyek e_1 -gyel nem párhuzamosak és nem is metszik e_1 -et.