Haladvány Kiadvány 09.09.20

Hujter Mihály: **Egy 115 éves feladat kapcsán**

Ezernyolcszázkilencvennégyben jelent meg az akkor még csak második esztendeje Győrben *Arany Dániel* által kiadott, később világhírűvé vált *Középiskolai Matematikai Lapok* folyóiratban a következő tétel a bizonyításával együtt: *Ha* $2\cos\vartheta = u + \frac{1}{u}$ *akkor egyidejüleg* $2\cos n\vartheta = u^n + \frac{1}{u^n}$, *bármily egész szám legyen is* n.

Természetesen $n = 0$ és $n = 1$ esetén az állítás semmitmondó, és negatív n-ekre ugyanaz, mint pozitív n-ekre. Tehát csak azt kell igazolni, hogy $n = 2, 3, 4, ...$ esetén fennáll

$$2\cos\vartheta = u + \frac{1}{u} \qquad \Longrightarrow \qquad 2\cos n\vartheta = u^n + \frac{1}{u^n}$$

A sasszeműek észrevehetik, hogy itt gond lehet páros n-re, hiszen páros n esetén a számtani és mértani közép közti összefüggés alapján $u^n + \frac{1}{u^n} \geq 2$, miközben $2\cos n\vartheta \leq 2$. Rájövünk, hogy bizony a KöMaL elfelejtette megemlíteni, hogy miközben ϑ egy valós szám — mindenki erre gondol —, aközben u egy komplex szám, ráadásul 1 abszolút értékű. De semmi gond, ilyen *komplex* értelemben az állítás igaz.

Itt említjük meg, hogy hasonló állítás van érvényben koszinusz helyett koszinusz hiperbolikusz esetén is, de ott nem kell kilépnünk a valós számok köréből.

Nem meglepedés, hogy a KöMaL bizonyítása teljes indukcióval történik. Itt most — lényegében — megismételjük a bizonyítást, de ügyelünk arra is, hogy egy fordított irányú állítást is bizonyítsunk:

$$2\cos n\vartheta = u^n + \frac{1}{u^n} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{u + \frac{1}{u}}{2} \in \left\{ \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi k}{n}\right) : k \ = 0, 1, 2, ..., n-1 \right\}$$

A fordított irányú állítás is semmitmondó $n = 0$ és $n = 1$ esetén; n helyett $-n$-et írva pedig ugyanazt állítja, mint n-re (ez utóbbi esetben természetesen $k = 0, -1, -1, ..., 1 - n$). A fenti halmaz $n = 2$ esetén csak a $\cos\vartheta$ és a $-\cos\vartheta$ elemeket tartalmazza.

A bizonyításban az $n = 2$ esettel kezdett a KöMaL, bár kezdhette volna az $n = 0$ és $n = 1$ esetekkel is, de azokat Arany Dánielék feltehetően túlságosan is közönségesnek gondolták. (Ne feledjük, akkoriban még javában viktoriánus korszak volt; Viktória királynő hatalmas birodalma trónján ült éppen!) A $\cos 2\vartheta = 2\cos^2\vartheta - 1$ összefüggés alapján $2\cos\vartheta = u + \frac{1}{u}$ esetén

$$2\cos 2\vartheta = 4\left(\frac{u}{2} + \frac{1}{2u}\right)^2 - 2 = u^2 + \frac{1}{u^2}$$

A régi KöMaL szerint most jön az indukciós lépés $n = 2, 3, 4, ...$ esetén n-ről $n + 1$-re. Azonban a leközölt bizonyítás négyzetgyökök alkalmazását is igényli, de ami még rosszabb, a négyzetgyökkel előjelhibát is elkövet, hiszen egy helyen azt látjuk, hogy

$$\sin\vartheta = \sqrt{1 - \cos^2\vartheta}$$

és egy ilyen lépésre — most már két évszázaddal fiatalabban — mi elégtelent adunk a hallgatóinknak. A KöMaL eredeti bizonyítását tehát egy újabbal váltjuk fel! Csak annyit teszünk, hogy nem n-ről következtetünk $n+1$-re, hanem inkább $n-1$-ről és n-ről $n+1$-re. Használni fogjuk a

$$\cos(n-1)x + \cos(n+1)x = -2\cos nx \cos x$$

összefüggést, amit hamar levezethetünk a közismert $\cos(\alpha - \beta)$ és $\cos(\alpha + \beta)$ kiszámítási lépleteiből:

$$\begin{aligned} \cos(nx - x) &= \cos nx \cos x - \sin nx \sin x \\ \cos(nx + x) &= \cos nx \cos x + \sin nx \sin x \end{aligned}$$

A KöMaL eredeti állítását tehát így bizonyíthatjuk $n-1$-ről és n-ről $n+1$-re:

$$\begin{aligned} 2\cos(n+1)\vartheta &= -2\cos(n-1)\vartheta + (2\cos n\vartheta)(2\cos\vartheta) \\ &= -u^{n-1} - \frac{1}{u^{n-1}} + \left(u^n + \frac{1}{u^n}\right)\left(u + \frac{1}{u}\right) \\ &= u^{n+1} + \frac{1}{u^{n+1}} \end{aligned}$$

A fordított irány nem jön ki ennyire könnyen! Tekintsük a

$$w = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

komplex számot. Most

$$w + \frac{1}{w} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta + \frac{1}{\cos\vartheta + i\sin\vartheta} = 2\cos\vartheta$$

és így a fentiekben már bizonyítottak szerint

$$2\cos n\vartheta = w^n + \frac{1}{w^n}$$

Tehát ha

$$2\cos n\vartheta = u^n + \frac{1}{u^n}$$

akkor

$$0 = w^n + \frac{1}{w^n} - u^n - \frac{1}{u^n} = \frac{(w^n - u^n)(w^n u^n - 1)}{w^n u^n}$$

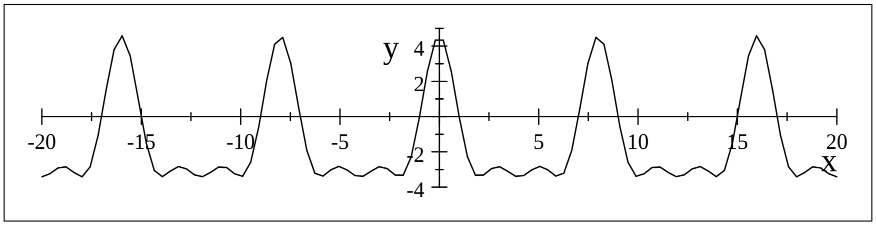
és így vagy $w^n = u^n$ vagy $w^n u^n = 1$. Mindkét esetben u felírható tw alakban, ahol $t^n = 1$. Ezért

$$\frac{u + \frac{1}{u}}{2} = \frac{tw + \frac{1}{tw}}{2}$$

Mivel t és w is 1 abszolút értékű, ezért tw is, melynek valós része éppen a fenti képlet jobb oldala. Itt tw valós része $\cos\left(\vartheta + \frac{2\pi k}{n}\right)$ alakú valamely $k = 0, 1, ..., n$ esetén, hiszen $t^n = 1$. Ezzel a bizonyítás mindkét irányban kész.

A tárgyalt tételeket felhasználhatjuk arra, hogy a trigonometrikus egyenlet megoldását visszavezessük egy komplex együtthatós polinom gyökeinek megkeresésére, mely sok számítógépes programrendszerben viszonylag könnyen lehetséges.

Tekintsünk egy példát:



$$\cos\frac{3\pi}{4}x + 2\cos\frac{\pi}{2}x + 3\cos\frac{\pi}{4}x - \sqrt{2} = 0$$

Bevezetjük a $2\cos\frac{\pi}{4}x = u + \frac{1}{u}$ helyettesítést, és és ezt nyerjük:

$$u^3 + u^{-3} + 2u^2 + 2u^{-2} + 3u + 3u^{-1} - 2\sqrt{2} = 0$$

azaz

$$u^6 + 2u^5 + 3u^4 - 2\sqrt{2}u^3 + 3u^2 + 2u + 1 = 0$$

A polinom négyszeresét szorzattá tudjuk bontani:

$$\left(u^2 - \sqrt{2}u + 1\right)\left(2u^2 + \left(2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2 + \sqrt{32}}\right)u + 2\right)$$
$$\left(2u^2 + \left(2 + \sqrt{2} - i\sqrt{2 + \sqrt{32}}\right)u + 2\right)$$

Az első tényezőből kapjuk a

$$2\cos\frac{\pi}{4}x = \sqrt{2}$$

megoldást, ahonnét x értéke már könnyen meghatározható:

$$|x| \in \{1, 7, 9, 15, 17, ...\}$$

A másik két tényező gyökei is meghatározhatók, azok közül azonban egy-egy abszolút értéke 2-nél több, a maradék egy-egy gyök abszolút értéke pedig $\frac{1}{2}$-nél kevesebb. Az eredeti, az x-re vonatkozó egyenletnek tehát nincs több megoldása.