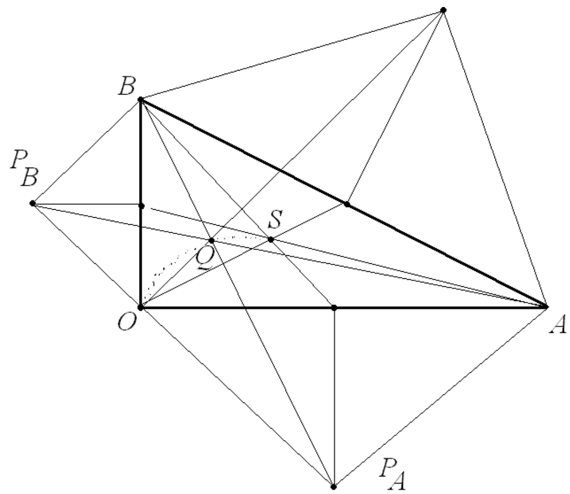

Haladvány Kiadvány 09.10.11

Hujter M.: **Minden nem egyenlőszárú derékszögű háromszögnek megvan a maga hiperbolája**

Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, melynek egyik csúcsa O, az origó, egy másik csúcsa $A(1;0)$, a harmadik csúcsa pedig $B(0;b)$ valamely $0 < b < 1$ esetén. Kifelé minden oldalhoz, mint alaphoz egymással hasonló egyenlőszárú háromszögeket illesztünk. Ezen új háromszögek külső csúcsait összekötjük az eredeti háromszögben az átellenes csúccsal. Ismert tény — és könnyen ellenőrizhető is —, hogy ez a három egyenes egy ponton megy át. Jelölje ezt a közös pontot Q. Itt most megmutatjuk, hogy a Q pont mértani helye egy olyan hiperbolaív az origó és az eredeti háromszög súlypontja között, mely hiperbola egyenlete:

$$x^2 - y^2 + \left(\frac{2}{b} - 2b\right) xy - x + by = 0$$

Bizonyítás: Az nyilvánvaló, hogy a fenti egyenletű hiperbola átmegy az origón is és az $S(\frac{1}{3}; \frac{b}{3})$ súlyponton is, hiszen

$$\frac{1}{9} - \frac{b^2}{9} + \left(\frac{2}{b} - 2b\right) \cdot \frac{b}{9} - \frac{1}{3} + \frac{b^2}{3} = 0$$

Az is világos, hogy a Q pont mértani helye az $OASB$ konkáv négyszög belsejében van. Ha az egyenlő szárú háromszögek szárak közötti szöge majdnem π, akkor a Q pont nyilván S közelében van. Ha pedig a szárak közti szög nagyon kicsi, akkor nyilván Q az origó közelében van. A szárak közti szög folytonos változtatásával egy folytonos görbét kapunk O és S között. Itt most az a dolgunk, hogy kimutassuk: ez a görbe egy hiperbolaív.

Ismert képlet, hogy az $(x_0; y_0)$ és $(x_1; y_1)$ nem azonos pontokon átmenő egyenes egyenlete:

$$(y - y_0)(x_1 - x_0) = (y_1 - y_0)(x - x_0)$$

Most az OA befogóhoz kifelé rajzolt egyenlőszárú háromszög harmadik csúcsa valamely $P_A(\frac{1}{2}, -p)$ pont pozitív p-re. A hasonlóságok miatt az OB befogóhoz kifelé rajzolt egyenlőszárú háromszög harmadik csúcsa: $P_B(-pb, \frac{b}{2})$. Tehát a BP_A egyenes egyenlete:

$$(y - b)(\frac{1}{2} - 0) = (-p - b)(x - 0)$$

Úgyszintén, az AP_B egyenes egyenlete:

$$(y - 0)(-pb - 1) = (\frac{b}{2} - 0)(x - 1)$$

Az egyenletrendszer megoldásaként kapjuk Q koordinátáit:

$$\begin{aligned} x &= \frac{b + 2b^2p}{3b + 4p + 4bp^2 + 4b^2p} \\ y &= \frac{b^2 + 2bp}{3b + 4p + 4bp^2 + 4b^2p} \end{aligned}$$

Most keresünk egy olyan

$$x^2 - qy^2 + rxy + sx + ty = 0$$

egyenletű hiperbolát, ami átmegy a Q ponton, és a q, r, s, t paraméterek értéke csak b-től függ. A p paraméter következő polinomjának kell azonosan nullának lenni:

$$\begin{aligned} & (b + 2b^2p)^2 - q(b^2 + 2bp)^2 + r(b + 2b^2p)(b^2 + 2bp) \\ & +(s\left(b + 2b^2p\right) + t\left(b^2 + 2bp\right))(3b + 4p + 4bp^2 + 4b^2p) \\ = \quad & 4b\left(2sb^2 + 2tb\right)\ p^3 \\ & + \left(\left(2sb^2 + 2tb\right)\left(4b^2 + 4\right) - 4b^2q + 4b^3r + 4b\left(tb^2 + sb\right) + 4b^4\right)\ p^2 \\ & + \left(\left(tb^2 + sb\right)\left(4b^2 + 4\right) + r\left(2b^4 + 2b^2\right) - 4b^3q + 3b\left(2sb^2 + 2tb\right) + 4b^3\right)\ p \\ & + b^3r - b^4q + 3b\left(tb^2 + sb\right) + b^2 \end{aligned}$$

Tehát úgy kell megválasztanunk a q, r, s, t paraméterek értékeit, hogy csak b-től függjenek, és teljesüljön:

$$\begin{aligned} 4b\left(2sb^2 + 2tb\right) &= 0 \\ \left(2sb^2 + 2tb\right)\left(4b^2 + 4\right) - 4b^2q + 4b^3r + 4b\left(tb^2 + sb\right) + 4b^4 &= 0 \\ \left(tb^2 + sb\right)\left(4b^2 + 4\right) + r\left(2b^4 + 2b^2\right) - 4b^3q + 3b\left(2sb^2 + 2tb\right) + 4b^3 &= 0 \\ b^3r - b^4q + 3b\left(tb^2 + sb\right) + b^2 &= 0 \end{aligned}$$

Bámulatos szerencsénkre megoldást találunk:

$$q = 1, \qquad r = \frac{2}{b} - 2b, \qquad s = -1, \quad t = b$$

Tehát a keresett hiberbolaegyenlet:

$$x^2 - y^2 + \left(\frac{2}{b} - 2b\right) xy - x + by = 0$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Fenti eredményünk kapcsolódik két fiatal kollégánk tudománytörténeti dolgozataihoz. Kiss [1] kimutatta, hogy a Q pont — mint három szakasz közös metszéspontja — létezik még nem derékszögű háromszög esetében is. Szmerka [2] olyan pontot — az úgynevezett *izogonális* pontot — vizsgált, melyből nézve a háromszög mindhárom oldala egyenlő szög alatt látszik. Derékszögű háromszög esetében az izogonális pont is rajta van az általunk tekintett hiperbolaíven, hiszen az izogonális pontot a $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$ paraméterértékre kapjuk a

$$x = \frac{b + 2b^2 p}{3b + 4p + 4bp^2 + 4b^2 p} \qquad\qquad y = \frac{b^2 + 2bp}{3b + 4p + 4bp^2 + 4b^2 p}$$

képletekből:

$$x = \frac{b + \sqrt{3}b^2}{2\sqrt{3} + 3b + (2\sqrt{3} + 3)b^2} \qquad\qquad y = \frac{b^2 + \sqrt{3}b}{2\sqrt{3} + 3b + (2\sqrt{3} + 3)b^2}$$

Ez a pont azonos azzal, melynek a három háromszögcsúcstól mért távolságösszege minimális. Ha $b \to 1$, akkor ez a pont tart ahhoz a ponthoz, melynek minkét koordinátája: $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

Jó kérdésfelvetés, hogy mi történik a Q ponttal, ha nem kifelé, hanem befelé vesszük fel az egyenlő szárú háromszögeket, azaz ha p negatív. Speciálisan, ha $p = \frac{-b}{2}$, akkor $Q = A$ lesz. Nem meglepetés, hogy ez a pont is rajt van a hiperbola ugyanazon ágán. Láthatjuk: $\frac{-b}{2} < p < 0$ esetén a hiperbola S és A közti ívét kapjuk. Természetesen a hiperbola folytatódik $p < \frac{-b}{2}$ esetén is. A Q ponton átmenő három tekintett egyenes párhúzamossá válik, ha a fenti képletekben a $3b + 4p + 4bp^2 + 4b^2 p$ nevező nullává válik, azaz ha

$$p = \frac{-b - \frac{1}{b} \pm \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2} - 1}}{2}$$

Ezen két érték közti p-kre a Q pont a hiperbola másik ágára ugrik át. Ez a másik ág átmegy a B ponton.

Probléma 1: A b paraméter mely értékére görbül meg legjobban a fent tekintett hiperbolaív, azaz milyen b-re és p-re ($p > 0$) távolodhat el Q leginkább az O-ból induló súlyvonaltól?

Probléma 2: Geometriailag mi felel meg a hiperbola csúcsainak, fókuszainak, tengelyeinek, aszimptotáinak és az aszimptoták metszéspontjának? Mi felel meg a hiperbolához az O, A, B pontokban húzott érintőknek?

Probléma 3: A Q pont akkor is egy hiperbolaíven mozog-e, ha a B pontot levesszük az y-tengelyről és jobbra vagy balra tesszük fix helyre, miközben O és A ugyanaz marad, de a háromszög most sem lesz egyenlőszárú?

Hivatkozások

[1] Kiss Márton: *A Ceva-tétel trigonometrikus alakja és néhány alkalmazása*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2005, 514–518. oldalak.

[2] Szmerka Gergely: *Ízelítő a Fermat–Torricelli problémakörből*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 2008, 194–199. oldalak

Függelék

A tekintett hiperbola $b = \frac{3}{4}$ esetén a következő egyenletet és alakot nyeri:

$$x^2 - y^2 + \frac{7}{6}xy - x + \frac{3}{4}y = 0$$