Haladvány Kiadvány 09.11.02

Egyiptomi törtek végtelen pontosítása

Hujter Mihály

Napjainkban a nem egész számok leggyakrabban tizedes tört alakban kerülnek a szemünk elé, de ismerjük a valódi és a vegyes törtek fogalmát is, de ritkán még az áltört fogalmával is találkozunk. Az ókori Egyiptomban csak olyan törteket tekintettek, melyek számlálója 1; csak egyetlen kivételt engedtek meg: $\frac{2}{3}$. Jól ismerték és használták a $3^2 + 4^2 = 5^2$ összefüggést, de még ezt is:

$$3 + \left(\frac{1}{15}\right)^2 = \left(2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{15}\right)^2$$

Ez utóbbiból — mivel $\frac{1}{15^2} = \frac{1}{225}$ meglehetősen kicsi — nyerhető $\sqrt{3}$ közelítése:

$$\sqrt{3} \approx 2 - \frac{1}{5} - \frac{1}{15}$$

Azaz

$$2 - \sqrt{3} \approx \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$$

Jelen dolgozatban ezt a becslést pontosítjuk tetszőlegesen kicsi hibával, de továbbra is csak a régi egyiptomiak által is elfogadott törtek felhasználásával:

$$\begin{aligned} 2 - \sqrt{3} \quad &= \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{780} + \frac{1}{2107560} + \frac{1}{15386878263120} \\ &+ \frac{1}{820\,146\,920\,573\,494\,197\,299\,310\,240} + \cdots \end{aligned}$$

Ebben a képletben az első kivételével mindegyik nevező 15 többszöröse, ezért a fenti képlet 15-szöröse ezt jelenti:

$$\begin{aligned} 26 - 15\sqrt{3} \quad &= \quad \frac{1}{52} + \frac{1}{140\,504} + \frac{1}{1025\,791\,884\,208} \\ &+ \frac{1}{54\,676\,461\,371\,566\,279\,819\,954\,016} + \cdots \end{aligned}$$

Itt a jobboldalon a $d_1, d_2, d_3, \ldots$ nevezők sorozata a következő szabály szerint képződik:

$$\begin{aligned} d_0 &= 1 \\ d_1 &= 52 \\ d_{n+2} &= \frac{d_{n+1}^3}{d_n^2} - 2d_{n+1}, \quad \text{ha } n = 0, 1, \cdots \end{aligned}$$

Teljes indukcióval könnyen látható, hogy a d_n számok mindegyike egész, sőt az előzőnek többszöröse, hiszen

$$\frac{d_{n+2}}{d_{n+1}} = \left(\frac{d_{n+1}}{d_n}\right)^2 - 2$$

Innét már az is könnyen látható, hogy a fenti sor konvergenciája meglehetősen gyors. Mindent összevetve az eredeti egyiptomi képlet pontosítására ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} 2-\frac{1}{5}-\frac{1}{15}-\sqrt{3} &= \frac{1}{15}\cdot\left(\frac{1}{52}+\frac{1}{140\,504}+\frac{1}{1025\,791\,884\,208}+\cdots\right) \\ &= \frac{1}{15}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{d_n} \end{aligned}$$

Az érdekesség kedvéért megemlítjük hogy az eredeti egyiptomi képlet relatív hibája:

$$\frac{2-\frac{1}{5}-\frac{1}{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{26}{45}\sqrt{3}-1\ \approx 7.4\ \cdot 10^{-4}$$

Ugyanakkor a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{d_n}$ sorból csak az első három tagot kiszámítva a közelítés relatív hibája:

$$\begin{aligned} &\frac{2-\frac{1}{5}-\frac{1}{15}-\frac{1}{15}\cdot\left(\frac{1}{52}+\frac{1}{140\,504}+\frac{1}{1025\,791\,884\,208}\right)-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ =\ &\frac{26\,650\,854\,921\,601}{46\,160\,634\,789\,360}\sqrt{3}-1\approx 7.04\ \cdot 10^{-28} \end{aligned}$$

A fent bejelentett képletek bizonyítására tekintsük a következő a_n, b_n, c_n sorozatokat $n = 1, 2, 3, ...$-ra

$$\begin{aligned} a_1 &= 15; \qquad a_{n+1}=a_n^2-2 \\ b_n &= \frac{9}{5}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k} \\ c_n &= 3+\left(\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}\right)^2 \end{aligned}$$

Állítás.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{9}{5}-\sqrt{3}$$

Bizonyítás. Elég teljes indukcióval megmutatnunk, hogy $b_n = \sqrt{c_n}$. Az $n = 1$ eset rendben, hiszen

$$\frac{9}{5}-\frac{1}{15}=\sqrt{3+\frac{1}{15^2}}$$

Most feltesszük, hogy $b_n = \sqrt{c_n}$, és igazolni akarjuk, hogy $b_{n+1} = \sqrt{c_{n+1}}$. Mivel

$$b_{n+1}=b_n-\frac{1}{a_1a_2\cdots a_na_{n+1}}>\sqrt{c_n}-\frac{1}{a_1}>\sqrt{3}-\frac{1}{15}>0$$

ezért elég azt belátni, hogy

$$b_n^2 - b_{n+1}^2 = c_n - c_{n+1}$$

Ármost

$$\begin{aligned} b_n^2 - b_{n+1}^2 &= (b_n - b_{n+1})(b_n + b_{n+1}) \\ &= \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}} \left(2b_n - \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}} \right)^2 (2a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} b_n - 1) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} c_n - c_{n+1} &= \left(\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{a_{n+1}^2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}} \right)^2 \left(a_{n+1}^2 - 1 \right) \\ &= \left(\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1}} \right)^2 \left(a_{n+1}^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

Elegendő tehát azt megmutatni, hogy

$$2a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} b_n = a_{n+1}^2$$

azaz hogy

$$2a_1 a_2 \cdots a_n (a_n^2 - 2) b_n = \left(a_n^2 - 2 \right)^2$$

azaz hogy

$$2a_1 a_2 \cdots a_n b_n = a_{n+1}$$

Ez utóbbi állítást is teljes indukcióval bizonyítjuk, azaz hogy $k = 1, 2, 3, ...$ esetén

$$2a_1 a_2 \cdots a_k b_k = a_{k+1}$$

A $k = 1$ eset rendben, hiszen

$$2a_1 b_1 = 2 \cdot 15 \cdot \left(\frac{9}{5} - \frac{1}{15} \right) = 52 = a_2$$

Továbbá $k = 2, 3, ...$ esetén

$$\begin{aligned} 2a_1 a_2 \cdots a_k b_k &= 2a_1 a_2 \cdots a_{k-1} \left(b_{k-1} - \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} \right) a_k \\ &= \left(2a_1 a_2 \cdots a_{k-1} b_{k-1} - \frac{2}{a_k} \right) a_k \\ &= \left(a_k - \frac{2}{a_k} \right) a_k = a_k^2 - 2 = a_{k+1} \end{aligned}$$

Ezzel az Állítás bizonyítását befejeztük.

Következmény.

$$\begin{aligned} 2-\sqrt{3} &= \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{780}+\frac{1}{2107560}+\frac{1}{15386878263120} \\ &\quad +\frac{1}{820\,146\,920\,573\,494\,197\,299\,310\,240}+\ \ldots \end{aligned}$$

Ha nem ragaszkodunk az egyiptomi törtekhez, akkor a fenti képletből $\sqrt{3}$-ra tetszőlegesen nagy pontosságú áltört alakú közelítést nyerhetünk. Például az utolsó képlet kiírt tagjaiból ezt nyerjük:

$$\sqrt{3} \approx \frac{1420\,536\,136\,104\,448\,487\,712\,806\,401}{820\,146\,920\,573\,494\,197\,299\,310\,240}$$

Ennek a közelítésnek a relatív hibája mindössze:

$$\frac{1420\,536\,136\,104\,448\,487\,712\,806\,401}{2460\,440\,761\,720\,482\,591\,897\,930\,720}\sqrt{3}-1 \approx 1.37 \cdot 10^{-48}$$

A kiindulási $\sqrt{3}$-közelítés $\frac{26}{15}$ volt; a végtelenül pontosítható közelítéseket tehát így nyerjük:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} &\approx \frac{26}{15} \\ \sqrt{3} &\approx \frac{26}{15}\cdot\frac{1351}{1352} = \frac{1351}{780} \\ \sqrt{3} &\approx \frac{26}{15}\cdot\frac{1351}{1352}\cdot\frac{3650\,401}{3650\,402} = \frac{3650\,401}{2107\,560} \\ \sqrt{3} &\approx \frac{26}{15}\cdot\frac{1351}{1352}\cdot\frac{3650\,401}{3650\,402}\cdot\frac{26\,650\,854\,921\,601}{26\,650\,854\,921\,602} \\ &= \frac{26\,650\,854\,921\,601}{15\,386\,878\,263\,120} \\ \sqrt{3} &\approx \frac{26}{15}\cdot\frac{1351}{1352}\cdot\frac{3650\,401}{3650\,402}\cdot\frac{26\,650\,854\,921\,601}{26\,650\,854\,921\,602}\cdot\frac{1420\,536\,136\,104\,448\,487\,712\,806\,401}{1420\,536\,136\,104\,448\,487\,712\,806\,402} \\ &= \frac{1420\,536\,136\,104\,448\,487\,712\,806\,401}{820\,146\,920\,573\,494\,197\,299\,310\,240} \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

Itt a szorzótényezők sorozata úgy képződik, hogy az újabb tényezőben a számláló mindig 1-gyel kisebb a nevezőnél, a nevezők pedig így alakulnak:

$$\begin{aligned}
1352 &= 2 \cdot 26^2 \\
3650\,402 &= 2 \cdot (1352 - 1)^2 \\
26\,650\,854\,921\,602 &= 2 \cdot (3650\,402 - 1)^2 \\
1420\,536\,136\,104\,448\,487\,712\,806\,402 &= 2 \cdot (\ 26\,650\,854\,921\,602 - 1)^2 \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Nem véletlen, hogy ezek a számok a továbbiakban is váltakozva 402-re és 602-re végződnek; következésképpen a tényezők számlálója váltakozva 401-re és 601-re végződik. Azon se lepődjünk meg tehát, hogy a $\sqrt{3}$-at közelítő fenti áltört-sorozatban a számlálóban is és a nevezőben is az utolsó három számjegy periodikusan ismétlődik. És miért a 26-tal kezdődik minden? Talán mert $3^3 - 1 = 26$.