Terület, térfogat integrálással

Mennyi az $x, y, z \geq 0$; $ax + by + cz \leq d$ feltételeket kielégítő $(x; y; z)$ pontok halmazának térfogata?

(Ez a halmaz egy olyan tetraéder, melynek az origónál 3 derékszöge van. Természetesen a, b, c, d pozitív számok.)

A megoldás vázlata: Egy fix x-re az $y, z \geq 0$; $by + cz \leq d - ax$ feltételeket kielégítő pontok halmaza egy olyan derékszögű háromszög, melynek befogói: $\frac{d-ax}{b}$ és $\frac{d-ax}{c}$. Ennek területe: $\frac{(d-ax)^2}{2bc}$. Tehát a keresett térfogat:

$$\int_0^{d/a} \frac{(d-ax)^2}{2bc} dx = \frac{d^3}{6abc}$$

Kiszámítandó a következő két parabola által bezárt terület: $y = x - x^2$ és $y = x^2 + 2x - 3$.

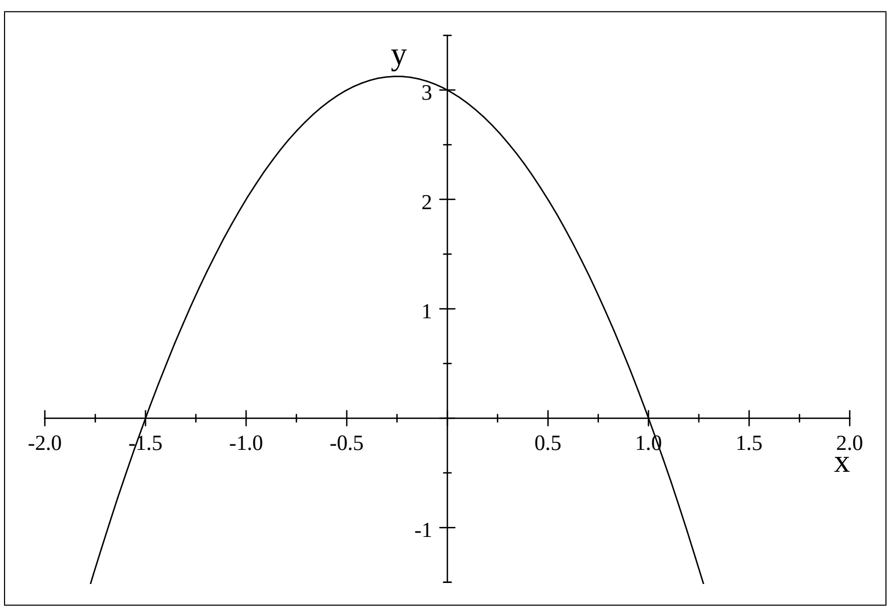
A megoldás vázlata:

$$x - x^2 = x^2 + 2x - 3$$

megoldása: $\frac{-3}{2}$,1. Ez kell tehát:

$$\int_{\frac{-3}{2}}^{1} (x - x^2) - (x^2 + 2x - 3) dx = \frac{125}{24} \approx 5.2$$

$$(x - x^2) - (x^2 + 2x - 3)$$



Kiszámítandó a $9x^2 + 16y^2 = 25$ egyenletű ellipszis területe.

A megoldás vázlata: Itt x legkisebb és legnagyobb értéke: $-\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{-5}{3}$ és $-\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$. Az ellipszisnek az x-tengely feletti fele ilyen területű:

$$\int_{\frac{-5}{3}}^{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{25 - 9x^2}{16}} dx = \frac{1}{4} \int_{\frac{-5}{3}}^{\frac{5}{3}} \sqrt{25 - 9x^2} dx$$

Mivel

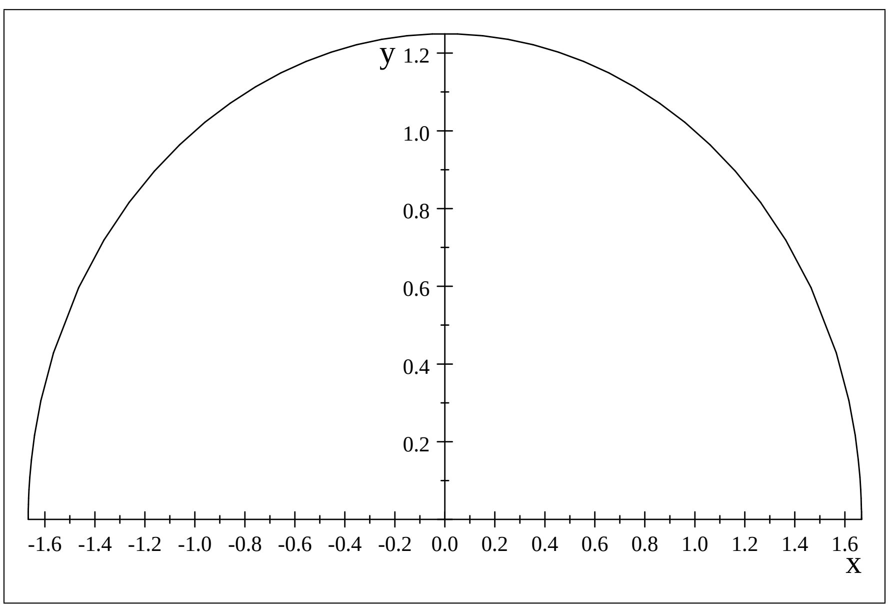
$$\int \sqrt{1 - x^2} = \frac{\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}}{2}$$

ezért

$$\int_{\frac{-5}{3}}^{\frac{5}{3}} \sqrt{25 - 9x^2} dx = \frac{25\pi}{6}$$

Tehát az ellipszis területe: $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{25\pi}{6} = \frac{25\pi}{12}$.

$$\sqrt{\frac{25 - 9x^2}{16}}$$



További hasonló feladatok, ha marad idő ...