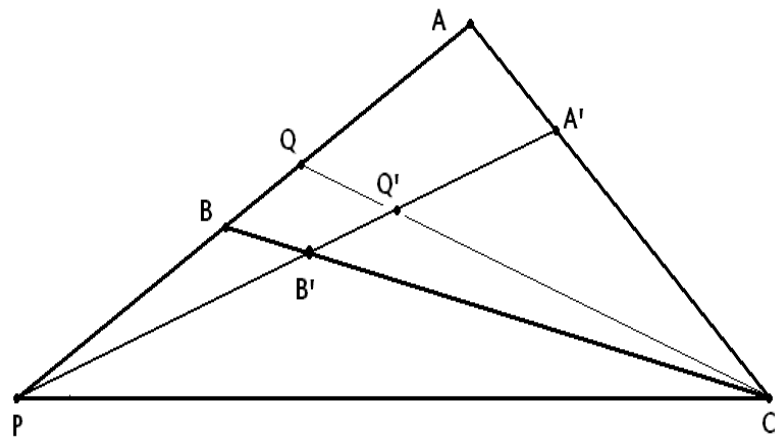

Haladvány Kiadvány 2010.07.03.
Serenus tétele
Hujter Mihály

Néhány kutató szerint *Serenus* kétezer éve, azaz Krisztus után 10 körül született. Itt most felelevenítjük az egyik tételét, és adunk arra egy modern bizonyítást. Végül egy feladara alkalmazzuk a tételt

Tekintsünk egy ABC háromszöget, és az AB oldalnak a B ponton túli meghosszabbításán egy P pontot. Majd vegyünk fel az AC illetve a BC oldalak belsejében egy A' illetve egy B' pontot úgy, hogy A',B',P egy egyenesen legyenek. Majd tekintsünk egy-egy Q illetve Q' pontot az AB illetve az $A'B'$ szakasz belsejében úgy, hogy az

$$AQ \cdot BP = AP \cdot QB$$

és az

$$A'Q' \cdot B'P = A'P \cdot Q'B'$$

egyenlőségek közül legalább az egyik fennáll. Állítjuk — ez lényegében *Serenus tétele* —, hogy a Q,Q',C pontok akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha mindkét fenti egyenlőség fennáll.

Megjegyzés: Az első egyenlőség jelentése az, hogy a Q pont az AB szakaszt $AP : BP$ arányban osztja, és hasonlóképpen a második egyenlőség jelentése az, hogy a Q' pont az $A'B'$ szakaszt $A'P : B'P$ arányban osztja.

Bizonyítástechnikai okokból vegyünk fel az ABC háromszög belsejében egy S pontot úgy, hogy a SP egyenes egyik oldalára kerüljenek az A, A', B, B' pontok mind, a másik oldalra pedig a C pont. A SP egyenesnek az AC illetve BC szakaszokkal való közös pontját jelölje A'' illetve B''. Az $A''B''$ szakasz belsejében vegyük fel a Q'' pontot úgy, hogy az az $A''B''$ szakaszt $A''P : B''P$ arányban ossza.

Most először megmutatjuk, hogy ha $AQ \cdot BP = AP \cdot QB$, akkor Q'' rajt van a QC egyenesen, nyilván a QC szakasz belsejében. Ugyanígy bizonyítható, hogy a $A'Q' \cdot B'P = A'P \cdot Q'B'$, akkor Q'' a $Q'C$ szakasz belsejében van. Másodszorra megmutatjuk, hogy ha Q'' rajt van a QC szakaszon, akkor fennáll $AQ \cdot BP = AP \cdot QB$. Ugyanígy bizonyítható, hogy ha Q'' rajt van a $Q'C$ szakaszon, akkor fennáll $A'Q' \cdot B'P = A'P \cdot Q'B'$. A négy állításból pedig láthatóan következik Serenus tétele.

A kijelölt két állítást koordinátageometria segítségével bizonyítjuk. Felhasználjuk azt a tényt, hogy az affin transzformációk egyenestartók és egy-egy egyenesen három pont egymásközti távolságainak arányát is megtartják. Ezért alkalmas affinitás alkalmazása révén feltehetjük, hogy P az origó, C koordinátái: $(c;0)$, az AB egyenes meredeksége 1, az A pont koordinátái: $(a;a)$, a B pont koordinátái: $(b;b)$. Azt is feltehetjük, hogy $a > b > 0$ és hogy $a + b = 1 = c$. Most az $AQ \cdot BP = AP \cdot QB$ egyenlőség azt jelenti, hogy a Q pont koordinátái: $(q;q)$, ahol $(a-q)b = a(q-b)$. Figyelembe véve, hogy $a+b = 1$, az $(a-q)b = a(q-b)$ egyenlőség azt jelenti, hogy $q = 2ab$. A számtani és mértani közepek közti kapcsolat alapján $q < \frac{1}{2}$, ha $AQ \cdot BP = AP \cdot QB$. De annyi mindenképpen teljesül, hogy $0 < b < q < a = 1 - b < 1$.

Most először tegyük fel, hogy $AQ \cdot BP = AP \cdot QB$. Ekkor QC szakasz meredeksége:

$$\frac{q}{q-c} = \frac{2ab}{2ab-c} = \frac{2a(1-a)}{2a(1-a)-1} = \frac{2a^2-2a}{2a^2-2a+1}$$

Jelölje s a PS egyenes meredekségét. Nyilván $0 < s < 1$. Mivel a CA egyenes meredeksége $\frac{a}{a-c}$, ezért az egyenlete:

$$y = \frac{a}{a-c}(x-c) = \frac{ax-a}{a-1}$$

Most y helyére sx-et írva megkapjuk az A'' pont x-koordinátáját:

$$\frac{a}{a+s-as}$$

Hasonlóképpen a B'' pont x-koordinátája:

$$\frac{b}{b+s-bs} = \frac{1-a}{1-a+as}$$

Mivel a Q'' pont az $A''B''$ szakaszt $A''P : B''P$ arányban osztja, ezért a Q'' pont x-koordinátája:

$$\frac{2\left(\frac{1-a}{1-a+as}\right)\left(\frac{a}{a+s-as}\right)}{\frac{1-a}{1-a+as}+\frac{a}{a+s-as}} = \frac{2a(1-a)}{2a+s+2a^2s-2as-2a^2}$$

és s-szer ekkora az y-koordinátája. Következésképpen a $Q''C$ egyenes meredeksége:

$$\frac{\frac{2a(1-a)s}{2a+s+2a^2s-2as-2a^2}}{\frac{2a(1-a)}{2a+s+2a^2s-2as-2a^2}-1} = \frac{2a^2-2a}{2a^2-2a+1}$$

Valóban megegyezik tehát a QC egyenes meredekségével, tehát Q'' tényleg rajt van a QC szakaszon.

Fordítva, tegyük fel, hogy a q'' x-koordinátájú Q'' rajt van a QC szakaszon. A $Q''C$ egyenes meredeksége:

$$\frac{sq''}{q''-1} = \frac{2a^2-2a}{2a^2-2a+1}$$

Ezért a QC egyenes egyenlete:

$$y = \frac{2a^2-2a}{2a^2-2a+1}(x-1)$$

Ebbe behelyettesítve az $x = y = q$ értéket:

$$\begin{aligned} q &= \frac{2a^2-2a}{2a^2-2a+1}(q-1) \\ q &= 2a-2a^2 = 2ab \end{aligned}$$

és így valóban fennáll, hogy az AB szakaszt a Q pont $PA : PB$ arányban, azaz $a : b$ arányban osztja.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyezzük még, hogy Serenus tétele alapján könnyen bizonyítható, hogy a második ábránkon szereplő középső szürke háromszög hasonló az eredeti, nagy háromszöghöz, az oldalak páronként párhuzamosak, és a hasonlóság aránya 1 az 5-höz. Az ábra a súlyvonalakkal és a csúcsokból a szemközti oldalak harmadolópontjához húzott egyenesekkel készült. Az is levezethető, hogy a piros, a sárga és a zöld területek egyformán $\frac{6}{7}$ részei a szürke központi területnek, és az eredeti háromszögből színtelenül hagyott részek is $\frac{6}{7}$ részét jelentik az eredeti háromszögnek.