Haladvány Kiadvány 2011.01.17

Bolyai János egyik számításának következményéről

Hujter Mihály

Kiszámítandó

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 3^2}+\frac{1}{9\cdot 11\cdot 3^4}+\frac{1}{13\cdot 15\cdot 3^6}+\cdots$$

Bolyai János egyik kézirata szerint ha $0\le x\le 1$ esetén

$$y=\frac{x^3}{1\cdot 3}+\frac{x^5}{5\cdot 7}+\frac{x^7}{9\cdot 11}+\cdots$$

akkor (legalábbis $0<x<1$ esetén)

$$\frac{y''x-y'}{x^2}=\frac{1}{1-x^4}\qquad \text{azaz}\qquad \left(\frac{y'}{x}\right)'=\frac{1}{1-x^4}$$

Innen

$$\frac{y'}{x}=\int\frac{1}{1-x^4}\,dx=\frac{\arctan x}{2}+\frac{\ln\frac{1+x}{1-x}}{4}+k$$

valamely k konstansra, azaz

$$\begin{aligned} y &= \frac{kx^2}{2}+\int\frac{x\arctan x}{2}+\frac{x\ln\frac{1+x}{1-x}}{4}\,dx \\ &= \frac{kx^2}{2}+\frac{(1+x^2)}{4}\cdot\arctan x-\frac{1-x^2}{8}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}+C \end{aligned}$$

valamely C konstansra. Itt $x=0$-ra azt kapjuk, hogy $C=0$.
Az ismert Leibniz-formula alapján:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots \\ &= \left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\cdots \\ &= \frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{9\cdot 11}+\cdots \end{aligned}$$

tehát $x=1$-re azt kapjuk, hogy

$$\frac{\pi}{8}=\frac{k}{2}+\frac{1+1^2}{4}\cdot\frac{\pi}{4}$$

azaz $k=0$, hiszen $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1-x^2}{8}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}\right)=0$. Tehát

$$y=\frac{1+x^2}{4}\cdot\arctan x-\frac{1-x^2}{8}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Az $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ esetben azt nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^3}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 3^2}+\frac{1}{9\cdot 11\cdot 3^4}+\frac{1}{13\cdot 15\cdot 3^6}+\cdots\right) \\ =\ &\frac{1+\frac{1}{3}}{4}\cdot\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1-\frac{1}{3}}{8}\cdot\ln\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\pi}{18}-\frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{12} \end{aligned}$$

Mindazonáltal:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 3^2}+\frac{1}{9\cdot 11\cdot 3^4}+\frac{1}{13\cdot 15\cdot 3^6}+\cdots \\ =\ &\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}\right)\approx 0.336\,64 \end{aligned}$$

Bolyai János szóbahozott számításairól itt olvashatunk részletesebben:

Hivatkozás

[1] Kiss E. és Szabó P. G.: A matematikai analízis problémái a két Bolyai kéziratos hagyatékában, Matematikai Lapok **16** (2010) 2. szám, pp. 7–17.