Haladvány Kiadvány 2011.02.11

Négyszázötven percnyi figyelem

Hujter Mihály

.

Négyszázötven percnyi idő éppen tíz tanóra hossza. Itt azonban 450 *ívperc*ről lesz szó. Jelölje ebben a dolgozatban φ ezt a szöget. Kiderítjük a következőt:

$$\tan\varphi = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$$

Mivel π értéke ívpercekben $180 \cdot 60 = 10\,800$, ezért

$$\varphi = \frac{450\pi}{10800} = \frac{\pi}{24}$$

Mivel

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

ezért a $\pi/6$ és a $\pi/4$ szögekből indulunk ki, hiszen tudjuk, hogy

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

Felhasználjuk az ismert képletet:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Így $\pi/8$ tangensét az

$$1 = \frac{2x}{1-x^2}$$

egyenlet pozitív megoldásaként kapjuk:

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

Ebből

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}} = 1 + \tan^2\frac{\pi}{8} = 1 + \left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 4 - 2\sqrt{2} = 4 - \sqrt{8}$$

és így

$$\begin{aligned}
\cos^2\frac{\pi}{8} &= \frac{1}{4-2\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \\
\sin^2\frac{\pi}{8} &= 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Másképpen írva:

$$4\sin^2 22^\circ 30' = 2 - \sqrt{2} \qquad 4\cos^2 22^\circ 30' = 2 + \sqrt{2}$$

Most már $\alpha = \pi/6$, $\beta = -\pi/8$ szereposztással nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{24} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 - \sqrt{2}}{1 - \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}+1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1+\sqrt{2}} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{6}\,\right)\left(\sqrt{3}+1+\sqrt{2}\right)}{4+2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}-2} \\
&= \frac{\left(1+\sqrt{3}-\sqrt{6}\,\right)\left(\sqrt{3}+1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-2\right)}{4} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2
\end{aligned}$$

Következésképpen

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{12} &= \frac{2\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\right)}{1-\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-4}{6\sqrt{6}-8\sqrt{3}+10\sqrt{2}-14} \\
&= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{3\sqrt{6}-4\sqrt{3}+5\sqrt{2}-7} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}{3\sqrt{6}-4\sqrt{3}+5\sqrt{2}-7} \cdot \frac{-3\sqrt{6}-4\sqrt{3}+5\sqrt{2}+7}{-3\sqrt{6}-4\sqrt{3}+5\sqrt{2}+7} \\
&= \frac{4\sqrt{6}+5\sqrt{3}-6\sqrt{2}-10}{2\sqrt{6}-5} \cdot \frac{-2\sqrt{6}-5}{-2\sqrt{6}-5} = 2-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Másképpen írva:

$$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

Ebből
$$\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{12}} = 1+\tan^2\frac{\pi}{12} = 1+\left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 8-4\sqrt{3}$$
és így
$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\pi}{12} &= \frac{7-4\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}\\ \cos^2\frac{\pi}{12} &= 1-\frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$
Másképpen írva:
$$4\sin^2 15^\circ = 2-\sqrt{3} \qquad\qquad 4\cos^2 15^\circ = 2+\sqrt{3}$$
Azt is tudjuk, hogy
$$\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{24}} = 1+\tan^2\frac{\pi}{24} = 1+\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\right)^2 = 16-6\sqrt{6}+8\sqrt{3}-10\sqrt{2}$$
Ebből
$$\begin{aligned}\cos^2\frac{\pi}{24} &= \frac{1}{16-6\sqrt{6}+8\sqrt{3}-10\sqrt{2}}\cdot\frac{8+3\sqrt{6}-4\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{8+3\sqrt{6}-4\sqrt{3}-5\sqrt{2}}\\ &= \frac{8+3\sqrt{6}-4\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{24-16\sqrt{2}}\cdot\frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}\\ \sin^2\frac{\pi}{24} &= 1-\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} = \frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}\end{aligned}$$
Másképpen írva:
$$8\sin^2 7^\circ 30' = 4-\sqrt{6}-\sqrt{2} \qquad\qquad 8\cos^2 7^\circ 30' = 4+\sqrt{6}+\sqrt{2}$$
Folytassuk a gondolatmenetet, és ne engedjünk a negyvennyolcból, tehát számítsuk ki 225 ívperc, azaz $\pi/48$ tangensét is. Meg kell oldanunk pozitív y-ra ezt az egyenletet:
$$\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2 = \frac{2y}{1-y^2}$$
Ez a szépség jön ki:
$$\tan\frac{\pi}{48} = \frac{\sqrt{8\sqrt{3}-10\sqrt{2}-6\sqrt{6}+16}-1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}$$
Ugyanakkor a z ismeretlenre felírt
$$\sqrt{2}-1 = \frac{2z}{1-z^2}$$
egyenlet pozitív megoldásából megkapjuk, hogy
$$\begin{aligned}\tan\frac{\pi}{16} &= \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}-1}{\sqrt{2}-1} = \left(\sqrt{4-2\sqrt{2}}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\\ &= \sqrt{8-4\sqrt{2}}+\sqrt{4-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}-1\end{aligned}$$
Ebből a
$$\sqrt{8-4\sqrt{2}}+\sqrt{4-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}-1 = \frac{2u}{1-u^2}$$
egyenlet megoldásával azt nyerjük, hogy
$$\tan\frac{\pi}{32} = \frac{\sqrt{4\sqrt{2}-8\sqrt{2-\sqrt{2}}-6\sqrt{4-2\sqrt{2}}+8}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}+2\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2}-1}$$
Most jelölje $\pi/5$ tangensének értékét v. Ekkor
$$\tan\frac{2\pi}{5} = \frac{2v}{1-v^2} \qquad\qquad \tan\frac{4\pi}{5} = \frac{\frac{4v}{1-v^2}}{1-\left(\frac{2v}{1-v^2}\right)^2} = \frac{4v(1-v^2)}{(1-v^2)^2-4v^2}$$
Mivel
$$\tan\frac{4\pi}{5} = -\tan\frac{\pi}{5}$$

ezért a

$$-v = \frac{4v(1-v^2)}{(1-v^2)^2-4v^2}$$

egyenletet nyerjük, amiből

$$v^2 = 5-2\sqrt{5}$$

Tehát

$$\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

Másképpen írva:

$$\tan^2 36^\circ = 5-2\sqrt{5}$$

Ebből

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{5}} = 1+\tan^2\frac{\pi}{5} = 6-2\sqrt{5}$$

és

$$\begin{aligned}
\sin^2\frac{\pi}{5} &= \frac{5-2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}} = \frac{5-2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}\\
\cos^2\frac{\pi}{5} &= 1-\frac{5-\sqrt{5}}{8} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}
\end{aligned}$$

Másképpen írva:

$$8\sin^2 36^\circ = 5-\sqrt{5} \qquad\qquad 8\cos^2 36^\circ = 3+\sqrt{5}$$

Most a w ismeretlenre felírt

$$\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \frac{2w}{1-w^2}$$

egyenlet pozitív megoldásaként nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{10} &= \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{(5-2\sqrt{5})\left(\sqrt{5}-2\right)^2}}{5-2\sqrt{5}}\\
&= \frac{\sqrt{(5-2\sqrt{5})\left(\sqrt{5}-2\right)^2\left(5+2\sqrt{5}\right)^2}}{5^2-(2\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}
\end{aligned}$$

Másképpen fogalmazva:

$$5\tan^2 18^\circ = 5-2\sqrt{5}$$

Innét

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{10}} = 1+\tan^2\frac{\pi}{10} = 2-2/\sqrt{5}$$

és

$$\begin{aligned}
\cos^2\frac{\pi}{10} &= \frac{1}{2-2/\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{8}\\
\sin^2\frac{\pi}{10} &= 1-\frac{5+\sqrt{5}}{8} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}
\end{aligned}$$

Másképpen írva:

$$8\sin^2 18^\circ = 3-\sqrt{5} \qquad\qquad 8\cos^2 18^\circ = 5+\sqrt{5}$$

Most a t ismeretlenre felírt

$$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5} = \frac{2t}{1-t^2}$$

egyenlet pozitív megoldásaként nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{20} &= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{\left(10-2\sqrt{5}\right)\left(5-2\sqrt{5}\right)}-\sqrt{5\left(5-2\sqrt{5}\right)}}{5-2\sqrt{5}}\\
&= \frac{\sqrt{\left(10-2\sqrt{5}\right)\left(5-2\sqrt{5}\right)\left(5+2\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt{5\left(5-2\sqrt{5}\right)\left(5+2\sqrt{5}\right)^2}}{5^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}\\
&= \frac{\sqrt{150+50\sqrt{5}}-\sqrt{125+50\sqrt{5}}}{5} = 1+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Másképpen írva:

$$\tan 9^\circ = 1+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

Innét

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{20}} = 1+\tan^2\frac{\pi}{20} = 1+\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)^2 = 12+4\sqrt{5}-2\sqrt{50+22\sqrt{5}}$$

és ebből

$$\begin{aligned}
\cos^2\frac{\pi}{20} &= \frac{1}{12+4\sqrt{5}-2\sqrt{50+22\sqrt{5}}}\cdot\frac{12+4\sqrt{5}+2\sqrt{50+22\sqrt{5}}}{12+4\sqrt{5}+2\sqrt{50+22\sqrt{5}}}\\
&= \frac{12+4\sqrt{5}+2\sqrt{50+22\sqrt{5}}}{24+8\sqrt{5}} = \frac{6+2\sqrt{5}+\sqrt{50+22\sqrt{5}}}{12+4\sqrt{5}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\\
&= \frac{8+3\sqrt{50+22\sqrt{5}}-\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{16}\\
\sin^2\frac{\pi}{20} &= 1-\frac{8+3\sqrt{50+22\sqrt{5}}-\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{16} = \frac{8-3\sqrt{50+22\sqrt{5}}+\sqrt{250+110\sqrt{5}}}{16}
\end{aligned}$$

Másképpen írva:

$$\begin{aligned}
16\sin^2 9^\circ &= 8-3\sqrt{50+22\sqrt{5}}+\sqrt{250+110\sqrt{5}}\\
16\cos^2 9^\circ &= 8+3\sqrt{50+22\sqrt{5}}-\sqrt{250+110\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Most az $\alpha=\pi/12$, $\beta=\pi/20$ szereposztással nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\pi}{30} &= \tan(\alpha-\beta) = \frac{2-\sqrt{3}-1-\sqrt{5}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{1+\left(2-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)}\\
&= \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{3-\sqrt{3}+2\sqrt{5}-\sqrt{15}-2\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{15+6\sqrt{5}}}
\end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{\pi}{20}-\frac{\pi}{24}=\frac{\pi}{120}$$

ezért az $\alpha=\pi/20$, $\beta=-\pi/24$ szereposztással azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\tan\frac{\pi}{120}\\
=&\ \frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{6}-\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{1+\left(1+\sqrt{5}-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\right)}\\
=&\ \frac{3-\sqrt{5+2\sqrt{5}}-\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{20+8\sqrt{5}}+\sqrt{15+6\sqrt{5}}-\sqrt{10+4\sqrt{5}}-\sqrt{30+12\sqrt{5}}+\sqrt{30}-\sqrt{20}-\sqrt{15}+\sqrt{10}+\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}
\end{aligned}$$

Folytatva ezeket a lépéseket a $\pi/240$, azaz a 45 ívperc egész többszöröseinek a tangensét, koszinusznégyzetét (és természetesen szinusznégyzetét) tudjuk így kifejezni. Ha pedig a harmadfokú polinomegyenlet megoldó képletét, a Cardano-képletet is igénybe vesszük, akkor 15 ívperc egész többszörösei mindegyikének a szinuszára (és közvetve a tangensére) kaphatunk egy-egy formulát a

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

azonosság felhasználásával. Például 15 ívperc szinuszára úgy nyerünk képletet, hogy előbb a fenti formulából kinyerjük $\tan\frac{\pi}{240}$ értékét, abból megkapjuk a $\cos^2\frac{\pi}{240}$ számot, abból kihozzuk $\sin\frac{\pi}{240}$ képletét, és felírjuk a

$$\sin\frac{\pi}{240} = 3\sin\frac{\pi}{720}-4\sin^3\frac{\pi}{720}$$

egyenlet megoldását, hogy megkapjuk $\pi/720$ azaz 15 ívperc szinuszát.
Akinek kedve van, folytathatja a dolgot, és kinyerheti 5 ívperc tangensét, szinuszát, koszinuszát, és elkészítheti a megfelelő táblázatokat az 5 ívperc egész többszöröseire. Nem biztos, hogy négyszázötven perc elegendő lesz a számításokra.

—

A szerző megköszöni Szabó Sándor kollégájának egyszerűsítő észrevételeit.