Haladvány Kiadvány 11.12.13

Ezertizenkettő
Hujter M.
hujter.misi@gmail.com

A Középiskolai Matematikai Lapokban pár hete jelent meg a következő azonosság bizonyítási feladatként:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2j-1)\pi}{4k+2}} = 2k(k+1) \tag{1}$$

Bizonyítás: Legyen $j = 1, 2, ..., k$ esetén $\vartheta_j = \frac{(2j-1)\pi}{4k+2}$ és $z_j = \cos\vartheta_j + i\sin\vartheta_j$. Most először megmutatjuk, hogy

$$\frac{(-1)^{j+1}}{\sin\vartheta_j} = \sum_{m=-k}^{k} z_j^{2m} \tag{2}$$

Másodszorra bizonyítjuk, hogy (1) bal oldala éppen

$$k(2k+1) + \sum_{n=1}^{2k} \left((2k+1-n) \sum_{j=1}^{k} \left(z_j^{2n} + z_j^{-2n} \right) \right) \tag{3}$$

Végül megmutatjuk, hogy (3) második tagja pontosan k. Ennek a három azonosságnak a kombinálása kiadja (1)-et.

Mivel $z_j - \frac{1}{z_j} = 2i\sin\vartheta_j$, ezért (2)-höz elég azt megmutatni, hogy

$$\left(\sum_{m=-k}^{k} z_j^{2m} \right) \left(z_j - \frac{1}{z_j} \right) = (-1)^{j+1} \cdot 2i$$

Vegyük észre, hogy a bal oldalon egy teleszkópikus összeg jön ki, nevezetesen $z_j^{2k+1} - z_j^{-2k-1}$. Node a z_j komplex szám definíciójából látszik, hogy $z_j^{2k+1} = i^{2j-1}$. Készen vagyunk (2) bizonyításával, hiszen

$$z_j^{2k+1} - z_j^{-2k-1} = i^{2j-1} - i^{1-2j} = (-1)^j \cdot i^{-1} - i \cdot (-1)^{-j} = (-1)^{j+1} \cdot 2i$$

Másrészt (2)-ből azt kapjuk, hogy (1) bal oldala ez:

$$\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{m=-k}^{k} z_j^{2m} \right)^2$$

Ha ezt kifejtjük, akkor a $z_1, z_2, ..., z_k$ és a $v_1 = z_1^{-1}, v_2 = z_2^{-1}, ..., v_k = z_k^{-1}$ határozatlanoknak egy polinomját nyerjük. Minden fix j-re a $z_j^0 = v_j^0 = 1$ összesen $2k+1$ alkalommal fordul elő; az összes j-t tekintve innét nyerjük (3) első tagját. Egy fix $n \in \{1, 2, ..., 2k\}$ számra z_j^{2n} is és $v_j^{2n} = z_j^{-2n}$ is összesen $2k+1-n$ darabszámszor jön elő. Tehát megkapjuk a (3) azonosságot. Végül megmutatjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{2k} \left((2k+1-n) \sum_{j=1}^{k} \left(z_j^{2n} + z_j^{-2n} \right) \right) = k$$

Az egyszerűbb jelölések érdekében használjuk a $w = z_1^2 = \cos\frac{\pi}{2k+1} + i\,\cos\frac{\pi}{2k+1}$ jelölést. A fenti képlet így írható:

$$\sum_{n=1}^{2k} \left((2k+1-n) \sum_{j=1}^{k} \left(w^{n(2j-1)} + w^{-n(2j-1)} \right) \right) = k \tag{4}$$

Megvizsgáljuk a bal oldalon a $\sum_{j=1}^{k} w^{n(2j-1)}$ képletrészletet. Mivel $w^{2k+1} = -1$, ezért a mértani sorozat összegképlete alapján

$$\sum_{j=1}^{k} w^{n(2j-1)} = \frac{w^n - (w^{2k+1})^n}{1 - w^{2n}} = \frac{w^n - (-1)^n}{1 - w^{2n}}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{k} w^{-n(2j-1)} = \frac{w^{-n} - (-1)^n}{1 - w^{-2n}}$$

Tehát

$$\sum_{j=1}^{k}\left(w^{n(2j-1)}+w^{-n(2j-1)}\right)=\frac{w^n-(-1)^n}{1-w^{2n}}+\frac{w^{-n}-(-1)^n}{1-w^{-2n}}\ =(-1)^{n+1}$$

Ebből már nyilvánvaló a (4) azonosság, mindazonáltal (1) bizonyítása is kész.

Érdemes megvizsgálni az (1) képlet néhány speciális esetét.

$k=2$

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\sin^2\frac{(2j-1)\pi}{10}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{16}{(\sqrt{5}-1)^2}+\frac{16}{(\sqrt{5}+1)^2}=12$$

Fokokban kiírva:

$$\frac{1}{\sin^2 18^\circ}=12-\frac{1}{\sin^2(3\cdot 18^\circ)}$$

$k=4$

$$\sum_{j=1}^{4}\frac{1}{\sin^2\frac{(2j-1)\pi}{18}}=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{18}}+\frac{1}{\sin^2\frac{5\pi}{18}}+\frac{1}{\sin^2\frac{7\pi}{18}}+4=40$$

Fokokban kiírva:

$$\frac{1}{\sin^2 50^\circ}+\frac{1}{\sin^2 70^\circ}=36-\frac{1}{\sin^2 10^\circ}$$

$k=7$

$$\sum_{j=1}^{7}\frac{1}{\sin^2\frac{(2j-1)\pi}{30}}=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{30}}+\frac{1}{\sin^2\frac{7\pi}{30}}+\frac{1}{\sin^2\frac{11\pi}{30}}+\frac{1}{\sin^2\frac{13\pi}{30}}+16=112$$

Fokokban kiírva:

$$\frac{1}{\sin^2 42^\circ}+\frac{1}{\sin^2 78^\circ}=96-\frac{1}{\sin^2 6^\circ}-\frac{1}{\sin^2 66^\circ}$$

$k=8$

$$\sum_{j=1}^{8}\frac{1}{\sin^2\frac{(2j-1)\pi}{34}}=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{34}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3\pi}{34}}+\frac{1}{\sin^2\frac{5\pi}{34}}+\frac{1}{\sin^2\frac{7\pi}{34}}+\frac{1}{\sin^2\frac{9\pi}{34}}+\frac{1}{\sin^2\frac{11\pi}{34}}+\frac{1}{\sin^2\frac{13\pi}{34}}+\frac{1}{\sin^2\frac{15\pi}{34}}=144$$

Ennek a képletnek az érdekessége az, hogy mivel $\frac{\pi}{34}$ szerkeszthető körzővel és vonalzóval, ezért a fenti tagok egyenként is kifejezhetők a négy alapművelet és pár négyzetgyökjel segítségével.

$k=13$

$$\sum_{j=1}^{13}\frac{1}{\sin^2\frac{(2j-1)\pi}{54}}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{54}}+\frac{1}{\sin^2\frac{5\pi}{54}}+\frac{1}{\sin^2\frac{7\pi}{54}}+\frac{1}{\sin^2\frac{11\pi}{54}}+\frac{1}{\sin^2\frac{13\pi}{54}}+\frac{1}{\sin^2\frac{17\pi}{54}}+\frac{1}{\sin^2\frac{19\pi}{54}}+\frac{1}{\sin^2\frac{23\pi}{54}}+\frac{1}{\sin^2\frac{25\pi}{54}}+40=364$$

Itt minden szög $3^\circ 20'$ többszöröse (páratlanszorosa).

$k=22$

$$\sum_{j=1}^{22}\frac{1}{\sin^2\frac{(2j-1)\pi}{90}}$$

$$=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{90}}+\frac{1}{\sin^2\frac{7\pi}{90}}+\frac{1}{\sin^2\frac{11\pi}{90}}+\frac{1}{\sin^2\frac{13\pi}{90}}+\frac{1}{\sin^2\frac{17\pi}{90}}+\frac{1}{\sin^2\frac{19\pi}{90}}$$

$$+\frac{1}{\sin^2\frac{23\pi}{90}}+\frac{1}{\sin^2\frac{29\pi}{90}}+\frac{1}{\sin^2\frac{31\pi}{90}}+\frac{1}{\sin^2\frac{37\pi}{90}}+\frac{1}{\sin^2\frac{41\pi}{90}}+\frac{1}{\sin^2\frac{43\pi}{90}}+148=1012$$

Ez az utolsó képlet fokokban írva és a szekáns függvényt alkalmazva nagyon szép alakot nyer:

$$\sec^2 4^\circ+\sec^2 8^\circ+\sec^2 12^\circ+\ldots+\sec^2 84^\circ+\sec^2 88^\circ=1012$$

Érdekes, hogy a szögek összege is éppen 1012°.