Haladvány Kiadvány 12.02.06

Páratlan kitevős páratlan hatványok összege

Hujter Mihály

Ismeretes, hogy

$$\sum_{j=1}^{n}(2j+1) = n(n+2)$$

Teljes indukcióval igazolhatók az alábbiak:

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{j=1}^{n}(2j+1)^3}{n\,(n+2)} &= 1+2\,(n+1)^2 \\
\frac{\sum_{j=1}^{n}(2j+1)^5}{n\,(n+2)} &= 1+\frac{4n^2+8n+3}{3}\cdot 4\,(n+1)^2 \\
\frac{\sum_{j=1}^{n}(2j+1)^7}{n\,(n+2)} &= 1+\frac{24n^4+96n^3+112n^2+32n+9}{3}\cdot 2\,(n+1)^2 \\
\frac{\sum_{j=1}^{n}(2j+1)^9}{n\,(n+2)} &= 1+\frac{32n^6+192n^5+392n^4+288n^3+60n^2+56n+5}{5}\cdot 8\,(n+1)^2
\end{aligned}$$

Sejtés: Rögzített páratlan $k \geq 3$ esetén

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}(2j+1)^k}{n\,(n+2)} = 1+(n+1)^2\cdot p(n)$$

ahol $p(n)$ egy $k-3$ fokú polinom.