Haladvány Kiadvány 2012-02-28

Ellipszisek és hiperbolák érintői

Hujter M. hujter.misi@gmail.com

Az

$$x^2 + y^2 = 1$$

egyenletű kör (x_0, y_0) pontjához húzott érintő egyenlete:

$$x_0 x + y_0 y = 1$$

Az

$$x^2 - y^2 = 1$$

egyenletű derékszögű hiperbola (*rectangular hyperbola*) (x_0, y_0) pontjához húzott érintő egyenlete:

$$x_0 x - y_0 y = 1$$

Közös bizonyítás: Az egyenleteket

$$x^2 + py^2 = 1$$

közös alakban tekintjük, ahol $p \in \{-1, +1\}$. A tekintett egyenes egyenlete:

$$x_0 x + p y_0 y = 1$$

Tulajdonképpen a $p \in \{-1, +1\}$ feltételt enyhíthetjük, mert csak annyit használunk fel, hogy $p \neq 0$. A kör helyett tehát ellipszist, a derékszögű hiperbola helyett általános hiperbolát gondolhatunk. Ismert, hogy minden ellipszis és minden hiperbola ezek valamelyikéhez hasonló. Az világos, hogy (x_0, y_0) rajt van a görbén is és az egyenesen is. Ha (x_1, y_1) is rajt van mindkettőn, akkor

$$\begin{aligned} x_1^2 + p y_1^2 &= 1 \\ x_0 x_1 + p y_0 y_1 &= 1 \end{aligned}$$

Célunk megmutatni, hogy $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$. Van most három paraméterünk, nevezetesen p, x_0, y_0, melyekre:

$$x_0^2 + py_0^2 = 1$$

Először nézzük azt az esetet, amikor $y_0 = 0$. Ekkor $x_0^2 = 1$ (azaz $x_0 = -1$ vagy $x_0 = +1$) és az egyenes egyenlete $x = x_0$. Innét már hamar kijön, hogy $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$. A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy $y_0 \neq 0$, és így $x_0 \notin \{-1, +1\}$. Mármost az egyenes egyenletéből megkapjuk, hogy

$$y_1 = \frac{1 - x_0 x_1}{py_0}$$

Tehát

$$x_1^2 + p\left(\frac{1 - x_0 x_1}{py_0}\right)^2 = 1$$

azaz

$$x_1^2 + \frac{(1 - x_0 x_1)^2}{p y_0^2} = 1$$

Ugyanakkor

$$x_0^2 + p y_0^2 = 1$$

Mindazonáltal

$$x_1^2 + \frac{(1 - x_0 x_1)^2}{1 - x_0^2} - 1 = 0$$

amiből $x_1 = x_0$. Ebből hamar megkapjuk, hogy $y_1 = y_0$. Ezzel készen vagyunk.