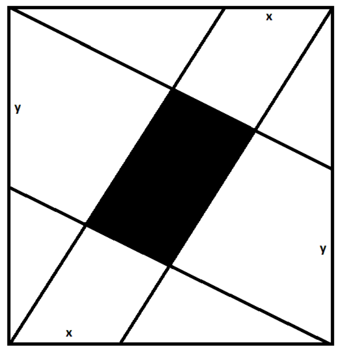

Haladvány Kiadvány 2012.06.06

Négyzet közepe számtani és mértani közepekkel

Hujter Mihály

.

Pár napja a következő feladványt tűztem ki: *Egy egységnégyzet közepében négy egyenessel (melyek páronként párhuzamosak) előállítottunk egy paralelogrammát az ábra szerint. Keresendő egy képlet a középső fekete paralelogramma területére x és y függvényeként. Megmutatandó, hogy ha x-nek és y-nak a számtani közepét rögzítjük, a paralelogramma akkor a legnagyobb területű, ha $x = y$.* (Segítség: $x = y = \frac{1}{2}$ esetén a paralelogramma területe: $\frac{1}{5}$.)

Nem véletlen, hogy az $x = y = \frac{1}{2}$ eset külön említve volt, ugyanis ez egy ismert feladat. Megtaláljuk középkori arab írásokban, sőt Bolyai Farkas és Kőnig Dénes kedvelt feladványai között is. Ott van a huszonegyedik században kitűzött feladatok közt is, például a műegyetemi Matematika Intézet honlapján. Ez az eset könnyen elintézhető; nem úgy az általános változat.

Fogjunk hozzá a megoldáshoz! Nyilván $0 < x < 1$ és $0 < y < 1$. Jelölje t a keresett területet, a az x és y számok számtani (aritmetikai) közepét, és g pedig az x és y számok mértani (geometriai) közepét. A dolog érdekessége az lesz, hogy t megformulázható tisztán csak a és g felhasználásával. A „vájtfülű” (pontosabban „fúrtagyú”) olvasónak ez persze nem meglepetés, hiszen t-re x-ben és y-ban szimmetrikus kifejezést remél; az ilyenekről pedig joggal várjuk el, hogy tisztán csak $x+y=2a$ és $xy=g^2$ felhasználásával felírhatók legyenek.

Most kellene kimondani a formulát! A színpadi feszültség fokozása érdekében ezzel még várunk! Először azt vázoljuk, hogyan lehet felírni egy paralelogramma területét. Ha adva van a párhuzamos oldalpárok távolsága, m és n, továbbá a paralelogramma egy szöge, ϑ, akkor könnyen láthatóan a paralelogramma területe: $mn/\sin\vartheta$.

Ha az ábrán a fekete paralelogramma bal oldali szögét jelöli ϑ, akkor ezen szög felső szárának iránytangense: $1/(1-x)$, az alsó szárának iránytangense: $y-1$. A két hegyesszöget α-val illetve β-val jelölve azt kapjuk, hogy $\cot\alpha = 1-x$ és $\tan\beta = 1-y$. Ezekből az ismert

$$\cot^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

és

$$\tan^2\beta = \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = \frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta}$$

összefüggések alapján nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha &= \frac{1}{2-2x+x^2} \\
\cos^2\alpha &= 1-\frac{1}{2-2x+x^2} \\
\cos^2\beta &= \frac{1}{2-2y+y^2} \\
\sin^2\beta &= 1-\frac{1}{2-2y+y^2}
\end{aligned}$$

Mindazonáltal

$$\begin{aligned}
&\cos^2\alpha\sin^2 a\cos^2\beta\sin^2\beta \\
=\ &\left(1-\frac{1}{2-2x+x^2}\right)\cdot\frac{1}{2-2x+x^2}\cdot\frac{1}{2-2y+y^2}\cdot\left(1-\frac{1}{2-2y+y^2}\right) \\
=\ &\frac{(1-x)^2(1-y)^2}{(2-2x+x^2)^2(2-2y+y^2)^2}
\end{aligned}$$

Ezekből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sin^2\vartheta &= \sin^2(\alpha+\beta) = (\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2 = \\
&= \cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\beta\sin^2\alpha+\ 2\cos\alpha\sin a\cos\beta\sin\beta \\
&= (1-\frac{1}{2-2x+x^2})(1-\frac{1}{2-2y+y^2})+ \\
&\quad \frac{1}{2-2x+x^2}\cdot\frac{1}{2-2y+y^2}+\frac{2\,(1-x)\,(1-y)}{(2-2x+x^2)(2-2y+y^2)} \\
&= \frac{(2-x-y+xy)^2}{(2-2x+x^2)(2-2y+y^2)}
\end{aligned}$$

A paralelogrammánk párhuzamosainak távolsága nyilván $x\sin\alpha$ illetve $y\cos\beta$. Összerakva képleteket:

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{\sqrt{2-2x+x^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{2-2y+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{(2-2x+x^2)(2-2y+y^2)}}{2-x-y+xy} \\ &= \frac{xy}{2-x-y+xy} \end{aligned}$$

Mivel $x+y=2a$ és $xy=g^2$, ezért

$$t = \frac{g^2}{2-2a+g^2}$$

Így

$$\frac{1}{t} - 1 = \frac{2-2a+g^2}{g^2} - 1 = \frac{2(1-a)}{g^2}$$

Most már látszik, hogy rögzített a-ra g csökkenése t csökkenését vonja maga után. Tehát a középső fekete terület akkor a legnagyobb, ha g a lehető legnagyobb. A számtani és mértani közép közti kapcsolat miatt tudjuk, hogy $g \leq a$, és egyenlőség csak az $x=y$ esetben lehetséges.

Végkövetkeztetéséként kimondhatjuk tehát, hogy

$$\frac{1}{t} - 1 \leq \frac{2(1-a)}{a^2}$$

azaz

$$t \leq \frac{a^2}{2-2a+a^2} = \frac{a^2}{1+(1-a)^2}$$

és itt egyenlőség akkor és csak van, ha $x=y$.

Érdemes megnézni azt is, hogy mi van akkor, ha nem a számtani, hanem a mértani közepet rögzítjük. Hasonló gondolatmenettel kijön, hogy ez esetben

$$t \leq \frac{g^2}{2-2g+g^2} = \frac{g^2}{1+(1-g)^2}$$

és itt egyenlőség akkor és csak van, ha $x=y$.

Az olvasóra bízzuk annak eldöntését, hogy milyen alsó vagy felső becslés adható a négyzet fekete közepe területének nagyságára, ha x-nek és y-nak a négyzetes közepét rögzítjük.