Haladvány Kiadvány 2012.06.12

Egy kis számolás az üzemanyag-felhasználás csökkentésére

Hujter Mihály

.

Néhai Varga Gyula fizikatanár emlékére

.

Hosszú évek óta Miska bácsi motoros forgókapával műveli a szőlőjét. Nagyon megdrágult a benzin, ezért Miska bácsi 10 százalékkal növelte a forgókapa munka-sebességét. Csalódására azonban annak ellenére, hogy pár perccel rövidült a munkaidő, 20 százalékkal növekedett az üzemanyag felhasználása. Miska bácsi nem érti a dolgot! Itt mi most egy kis számolással megmagyarázzuk neki a jelenséget, és javaslatot teszünk a munkasebesség helyes megválasztására.

Ezerkilencszázhatvanhét januárjában jelentette meg a Tankönyvkiadó Budapesten *Bende Sándor*, *Gallai Tiborné* és *Koncz Károly* kötetét *Matematikai Példatár I.* címmel. Ennek a közepén 13,79(3) jelzéssel ezt olvashatjuk: *Ismeretes, hogy az egy órai hajóutazás költségei forintban* $a + bv^3$*, ahol* a *és* b *állandók,* v *a sebesség.*

Először ezt a mondatot értelmezzük. Az utazás költségeinek egy részét nyilván az hajótársaság tőke- és adóköltségei és az alkalmazottak bérköltségei teszik ki; ezekről joggal tételezhetjük fel, hogy az utazási idővel arányosak. A költségek másik része a hajómotor üzemanyagköltsége. Állandó sebesség esetén az elhasznált üzemanyag egy része a motor üzemi hőmérsékletének fenntartására és az elekromos generátorok működtetésére fordítódik; ez tehát szintén idővel arányosnak tekinthető. A motor teljesítményének másik része a víz és a levegő közegellenállásának legyőzésére kell. Ismeretes, hogy a közegellenállás ereje a sebesség négyzetével arányos, a közegellenállással szembeni időegységenkénti elmozdulás pedig a sebességgel egyenessen arányos. A kettő szorzata a sebesség köbével arányos. Indokolt tehát a $c + bv^3$ képlet az üzemanyagfogyasztásra, ahol a c és b paraméterek állandóknak tekinthetők; c csak a hajótól és annak motorjától illetve a felhasznált üzemanyag minőségétől és árától függ, a sebességtől független; a b paraméter értéke függ a hajó terhelésétől, a víz és a levegő hőmérsékletétől is, esetleg a széltől és áramlásoktól is, de a sebesség megfelelő megválasztása szempontjából ez is állandónak tekinthető.

Miska bácsi forgókapája is hasonló rendszer! Feltételezhetjük, hogy a percenkénti benzinfogyasztás $c + bv^3$ alakú, ahol v a sebesség, a c és b paraméterek pedig csak a motor és az üzemanyag műszaki jellemzőitől és a megmunkálandó talaj állapotától függnek, a forgókapa haladási sebességétől nem. Természetesen fogalmunk sincs, hogyan lehetne a c és b paraméterek értékét kimérni. Viszont Miska bácsi keserű tapasztalatát felhasznáva ki tudjuk majd számítani a c/b arányt.

Az időt percekben, a benzint deciliterekben, a munkasebességet $m^2/perc$ mértékegyégben mérjük, mivel Miska bácsi szempontjából ezek a természetes mértékegységek, nekünk meg tulajdonképpen teljesen mindegy. Ha v sebességgel dolgozik a forgókapa, akkor a T négyzetméteres szőlőterületet T/v perc alatt munkálja meg, és ennyi idő alatt elhasznál

$$\left(c+bv^3\right)\cdot\frac{T}{v}$$

deciliter benzint. Jelölje v_0 a régebbi munkasebességet, amely mellett

$$\left(c+bv_0^3\right)\cdot\frac{T}{v_0}$$

deciliter benzin kellett. Amikor 10 százalékkal növekedett a sebesség, akkor 20 százalékka nőtt a benzinfogyasztás; tehát

$$\frac{\left(c+b\left(1.1\cdot v_1\right)^3\right)\cdot\frac{T}{1.1\cdot v_0}}{\left(c+bv_0^3\right)\cdot\frac{T}{v_0}}=1.2$$

azaz

$$\frac{c}{bv_0^3}=\frac{3333\,333\,333\,333\,333\,333\,293}{96\,969\,696\,969\,696\,969\,697\,000}$$

Itt a tört értéke közelítőleg $0.03\,44=\frac{43}{1250}$.

Ha 10 helyett $10n$ százalékkal nőtt volna a sebesség, akkor a benzinfogyasztás az eredetinek

$$\frac{\left(c+b\left(\left(1+\frac{n}{10}\right)\cdot v_1\right)^3\right)\cdot\frac{T}{\left(1+\frac{n}{10}\right)\cdot v_0}}{\left(c+bv_0^3\right)\cdot\frac{T}{v_0}}=\frac{\left(\frac{c}{b}+\left(\left(1+\frac{n}{10}\right)\cdot v_0\right)^3\right)}{\left(\frac{c}{b}+v_0^3\right)\left(1+\frac{n}{10}\right)}$$

arányú többszöröse lenne. Az utolsó képletbe beírva $c/\left(bv_0^3\right)$ helyére a $\frac{43}{1250}$ közelítést ezt kapjuk:

$$\frac{\left(\frac{43}{1250}\cdot v_0^3+\left(\left(1+\frac{n}{10}\right)\cdot v_0\right)^3\right)}{\left(\frac{43}{1250}\cdot v_0^3+v_0^3\right)\left(1+\frac{n}{10}\right)}=\frac{5}{2586}\cdot\frac{5n^3+150n^2+1500n+5172}{n+10}$$

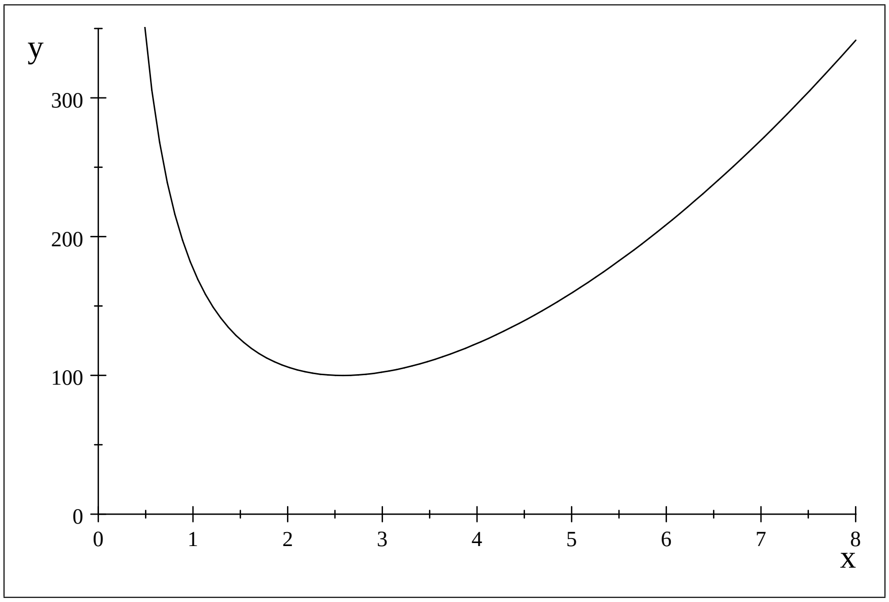
Itt érdemes megnézni a

$$\frac{5n^3+150n^2+1500n+5172}{n+10}$$

képletnek, mint n függvényének a viselkedését: Az $x=n+10$ jelöléssel

$$\begin{aligned}
&\frac{5n^3+150n^2+1500n+5172}{n+10}\\
=\;&\frac{5(x-10)^3+150(x-10)^2+1500(x-10)+5172}{x}\\
=\;&5x^2+\frac{172}{x}
\end{aligned}$$

Az utolsó képletet, mint x függvényét ábrázolva ezt kapjuk:



Látható, hogy körülbelül $x = 2.6$-nál van minimum. Pontosabban is számolhatunk: Mivel $5x^2 + 172/x$ deriváltja $10x - 172/x^2$ és a $10x - 172/x^2 = 0$ egyenlet megoldása körülbelül $x = 2.58$, mindebből az következik, hogy nem 10 százalékos sebességnöve- lést, hanem $10(2.6 - 10) = -74.0$ miatt 74 százalékos sebességcsökkentést javasoljunk Miska bácsinak. Valóban, ha az eredeti munkasebességet annak negyedére veszi vissza, akkor négyszer tovább tart ugyan a szőlőterület megmunkálása, viszont a benzinfogyasztás visszaesik az eredeti fogyasztásról

$$\frac{\left(\frac{43}{1250}v_0^3\ + \left(\frac{v_0}{4}\right)^3\right)\cdot 4}{\left(\frac{43}{1250}v_0^3 + v_0^3\right)} = \frac{667}{3448}$$

arányúra, azaz körülbelül az ötödére. Ha a gyakorlatban csak a negyedére esik is vissza, Miska bácsi annak is nagyon fog örülni.

A fent tárgyalt problémát általánosan is tekinthetjük. Tegyük fel, hogy pozitív konstans c-re és b-re továbbá pozitív változó v-re a v egy konkrét értékének p-szeresre változtatása a $(c + bv^3)/v$ kifejezés értékét q-szorosra változtatja. Megkérdezzük, hogy adott összetartozó p_0, q_0 értékpár esetén milyen p-re lesz a q/q_0 hányados a lehető legkisebb.

Tudjuk tehát, hogy

$$\frac{c + b(p_0v_0)^3}{p_0v_0} = q_0 \cdot \frac{c + bv_0^3}{v_0}$$

és p függvényében keressük

$$\frac{c + b(pv_0)^3}{pv_0}$$

minumumát. Bevezetve a

$$d = \frac{c}{bv_0^3}$$

jelölést azt kapjuk, hogy

$$\frac{dbv_0^3 + b(pv_0)^3}{pv_0} = \frac{d+p^3}{p} \cdot bv_0^2$$

Itt bv_0^2 konstans és

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{d+p^3}{p}\right) = 2p - \frac{d}{p^2}$$

továbbá

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(2p - \frac{d}{p^2}\right) = 2 + \frac{2d}{p^3}$$

Az utóbbi mindig pozitív, tehát a minimum ott vétetik fel, ahol $2p^3 - d = 0$, azaz

$$p = \sqrt[3]{\frac{d}{2}} = \sqrt[3]{\frac{c}{2bv_0^3}}$$

Mindazonáltal az eredeti

$$\frac{c + b(p_0v_0)^3}{p_0v_0} = q_0 \cdot \frac{c + bv_0^3}{v_0}$$

egyenlőségbe visszaírva ezt a p értéket azt kapjuk, hogy

$$p = \sqrt[3]{\frac{p_0(p_0^2 - q_0)}{2(p_0q_0 - 1)}}$$

Következésképpen az ehhez tartozó q értékre pedig

$$q = \frac{c + b(pv_0)^3}{pv_0} : \frac{c + bv_0{}^3}{v_0} = \frac{c + bp^3v_0^3}{p\,(c + bv_0^3)} = \frac{2bv_0^3p^3 + bp^3v_0^3}{p\,(2bv_0^3p^3 + bv_0^3)} = \frac{3p^2}{2p^3+1}$$

azaz

$$\begin{aligned} q^3 &= \left(\frac{3p^2}{2p^3+1}\right)^3 = \frac{27p^6}{(2p^3+1)^3} = \frac{27 \cdot \left(\frac{p_0(p_0^2-q_0)}{2(p_0q_0-1)}\right)^2}{\left(2 \cdot \frac{p_0(p_0^2-q_0)}{2(p_0q_0-1)} + 1\right)^3} \\ &= \frac{27p_0^2\left(p_0^2 - q_0\right)^2(p_0q_0 - 1)}{4\,(p_0-1)^3\left(p_0^2 + p_0 + 1\right)^3} \end{aligned}$$

Tehát

$$q = \sqrt[3]{6.75} \cdot \frac{\sqrt[3]{p_0^2\left(p_0^2 - q_0\right)^2(p_0q_0 - 1)}}{(p_0 - 1)\left(p_0^2 + p_0 + 1\right)}$$

Az eredeti szöveges feladatunk adataival:

$$
\begin{aligned}
p &= \sqrt[3]{\frac{1.1\cdot(1.1^2-1.2)}{2\cdot(1.1\cdot 1.2-1)}}\approx 0.258\\
q &= \sqrt[3]{6.75}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1.1^2\,(1.1^2-1.2)^2\,(1.1\cdot 1.2-1)}}{(1.1-1)\,(1.1^2+1.1+1)}\approx 0.193
\end{aligned}
$$

Jó munkát Miska bácsi! Dolgozzon négyszer lassabban, mint korábban, és használjon el ötször kevesebb benzint!

Filozófiai mélységekbe bocsátkozva joggal merül fel a kérdés, hogy a $p_0=1.1$ és $q_0=1.2$ adatok mennyire életszerűek. Fent az jött ki, hogy ilyen adatoknál Miska bácsi üzemanyagfelhasználása a megszokott munkasebességnél

$$\frac{c+bv_0^3}{c}=1+bv_0^3/c\approx 1+\frac{1250}{43}\approx 30$$

miatt harmincszorosa az üresjárati üzemanyagfogyasztásnak. Amikor pedig 10 százalékkal fokozta a sebességet, akkor a fogyasztás tovább növekedett

$$\left(1+\frac{1250}{43}\right)\cdot 1.2\cdot 1.1\approx 40$$

miatt az üresjárati fogyasztás negyvenszeresére. Ha olyan munkagépünk lenne, aminél 30 helyett csak 3 az arány, akkor q_0 értéke $p_0=1.1$ esetén sokkal kevesebb lenne. Valóban, az

$$1+bv_0^3/c=3$$

egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\frac{c}{bv_0^3}=\frac{1}{2}$$

és így

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \frac{c+b(p_0v_0)^3}{p_0v_0}:\frac{c+bv_0^3}{v_0}=\frac{c+b(p_0v_0)^3}{p_0(c+bv_0^3)}\\
&= \frac{2c+2b(p_0v_0)^3}{p_0(2c+2bv_0^3)}=\frac{bv_0^3+2b(p_0v_0)^3}{p_0(bv_0^3+2bv_0^3)}\\
&= \frac{2p_0^3+1}{3p_0}=\frac{2\cdot 1.1^3+1}{3\cdot 1.1}\approx 1.11
\end{aligned}
$$

Tehát nem húsz, hanem csak tizenegy százalékos a benzinfogyasztás emelkedése. Ha pedig nem 30, nem 3, hanem mondjuk 10 az arány, akkor $p_0=1.1$-hez ez a q_0 tartozik:

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \frac{9c+9b(p_0v_0)^3}{p_0(9c+9bv_0^3)}=\frac{bv_0^3+9b(p_0v_0)^3}{p_0(bv_0^3+9bv_0^3)}\\
&= \frac{9p_0^3+1}{10p_0}=\frac{9\cdot 1.1^3+1}{10\cdot 1.1}\approx 1.18
\end{aligned}
$$

Úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha Miska bácsi fogyasztásnövekedése nem 20, hanem csak 18 százalékos volt, akkor nem tudja az eredeti ötödére csökkenteni a fogyasztást, hanem a

$$\begin{aligned} q &= \sqrt[3]{6.75} \cdot \frac{\sqrt[3]{\left(p_0^2 \left(p_0^2 - q_0\right)^2 \left(p_0 q_0 - 1\right)\right.}}{\left(p_0 - 1\right)\left(p_0^2 + p_0 + 1\right)} \\ &= \sqrt[3]{6.75} \cdot \frac{\sqrt[3]{\left(1.1^2 \left(1.1^2 - 1.18\right)^2 \left(1.1 \cdot 1.18 - 1\right)\right.}}{\left(1.1 - 1\right)\left(1.1^2 + 1.1 + 1\right)} \approx 0.39 \end{aligned}$$

képlet miatt a kétötödére, de ehhez a sebességet sem a negyedére kell visszavennie, hanem csak az eredeti sebességnek körülbelül a harmadára-kétötödére, hiszen

$$\sqrt[3]{\frac{1.1 \cdot (1.1^2 - 1.18)}{2 \cdot (1.1 \cdot 1.18 - 1)}} \approx 0.38$$

No, ennyi idő alatt Miska bácsi már gyalog, hagyományos kapával is megmunkálta volna a szőlőterületet! Nulla benzinfogyás, majdnem nulla légszennyezés, és zajszennyezés is csak akkor, ha a kapáját élesre kikalapálja! És a gyalog kapálás még Miska bácsi energiáit sem szívná le annyira, mint amennyire leszívja a drasztikusan lassított forgókapa irányítása.