Haladvány Kiadvány 2012.06.14

Számítógépes vírusok vagy ugratás valószínűségéről

Hujter M.

.

Dedikálva egy másik Hujter M. *mai születésnapjára*

.

Egy nagyon okos kollégámtól ma kaptam egy e-levelet, mert a tegnap neki küldött e-levelem nála vírusosnak bizonyult. Válaszoltam neki, hogy én nagyon gondosan vigyázok a levelezőrendszerem tisztaságára, és hogy nálam legfeljebb egy ezred a valószínűsége, hogy vírust küld a számítógép még akkor is, ha visszajelzést kapok, miszerint valaki vírust kapott tőlem. Felvázoltam ugyanakkor hogy szerintem 4 lehetőség közül egy és csak egy következett be. A lehetőségek a következők:

1. Mégis én küldtem a vírust.

2. Az e-levelem útközben szedte össze a bajt.

3. Vírusmentes e-levelemet a kolléga számítógépe fertőzte meg érkezéskor.

4. Téves riasztás kapott a kolléga, mert a vírusvédelmi programja nem elég okos vagy túlságosan óvatos. Esetleg valaki azzal ugratja a kollégát, hogy vaklárma-vírusriadót fújt. Esetleg csak a kolléga próbál engem ugratni a visszajelzésével.

Megírtam a kollégámnak, hogy ezeknek a lehetőségeknek a valószínűsége szerintem a felsorolás sorrendjében növekszik. Két feltevéssel élek: Először is felteszem, hogy az első lehetőség valószínűsége nagyon kicsi. Másodszorra feltételezem, hogy a négy lehetőség valószínűsége mértani haladvány szerinti.

Mindebből levontam a következtetést: Becslésem szerint legalább kilencven százalék, hogy a negyedik lehetőség következett be.

Kedves Olvasó! Itt most megosztom önnel a háttérszámításaimat.

Az első lehetőség valószínűségét p-vel jelölöm. A mértani haladvány hányadosát q-val. Az utolsó lehetőség valószínűségét r-rel. Nyilván ezzel az egyenletrendszerrel állunk szemben:

$$\begin{aligned} p + pq + pq^2 + pq^3 &= 1 \\ r &= pq^3 \end{aligned}$$

Néhány p értékre kiszámítottam a q és r értékeket. Ezeket az alábbi táblázatban közlöm egész százalékra kerekített pontossággal:

p	q	r
0.2	1.15	0.30
0.1	1.66	0.46
0.05	2.64	0.58
0.02	3.27	0.70
0.01	4.25	0.77
0.005	5.47	0.82
0.002	7.57	0.87
0.001	9.64	0.90
0.0005	12.2	0.92

Ennek a táblázatnak az utolsó három sora alapján vontam le a következtetésemet.

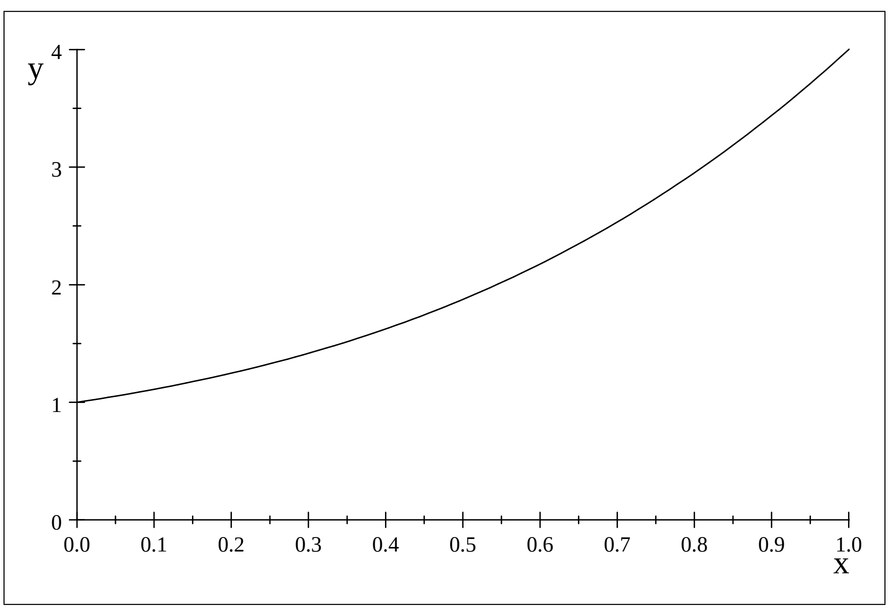
Most vigyünk a dologba egy kicsivel komolyabb matematikát! Az eredeti két egyenletből egyet csinálunk:

$$q^{-3} + q^{-2} + q^{-1} + 1 = r^{-1}$$

Bevezetve az $x = q^{-1}$ és $y = r^{-1}$ jelöléseket ezt kapjuk:

$$y = 1 + x + x^2 + x^3$$

Ez szép és egyszerű, de mire megyünk vele? Emlékezve arra, hogy q nagyobb 1-nél, azt kapjuk, hogy $0 < x < 1$. A fenti egyenlettel megadott görbe nagyon szép.



Az $1+x+x^2+x^3$ függvény deriváltja: $1+2x+3x^2$, és ez pozitív, hiszen

$$1+2x+3x^2 = 1+x(2+3x) > 1$$

A második derivált pedig $2+6x$, szintén pozitív. Tehát $0 < x < 1$ esetén szigorúan monoton növő konvex függvénnyel van dolgunk. Mindazonáltal $1 < y < 4$.

Nehezebb dolgunk van, ha a függvény inverzét akarjuk, azaz x értékét akarjuk kifejezni y függvényeként. Megkérdezhetjük a számítógépet, hogy mit ad erre. Tekintettel arra, hogy $1 < y < 4$ esetén x-nek egy 0 és 1 közötti valós számnak kell lenni, azt adja ki a gép, hogy

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}y + \sqrt{\frac{1}{4}y^2 - \frac{10}{27}y + \frac{4}{27}} - \frac{10}{27}} \\ &\quad - \frac{2}{9\sqrt[3]{\frac{1}{2}y + \sqrt{\frac{1}{4}y^2 - \frac{10}{27}y + \frac{4}{27}} - \frac{10}{27}}} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Hisszük is meg nem is! Lehetséges, hogy mégis vírusos a gépünk, tehát ellenőriznünk kell a végeredményt. Hogy egyszerűbb legyen a képlet, alkalmazzuk előbb a $w = 3x+1$ és $z = y/2$ jelöléseket. Mármost

$$2z = 1 + \frac{w-1}{3} + \left(\frac{w-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{w-1}{3}\right)^3$$

alapján ezt fogjuk megkapni:

$$\begin{aligned} w &= \sqrt[3]{27z + \sqrt{729z^2 - 540z + 108} - 10} \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt[3]{27z + \sqrt{729z^2 - 540z + 108} - 10}} \end{aligned}$$

De haladjunk csak szépen, lassan, ellenőrzötten! Először is azt nézzük meg, hogy ez a végeredmény értelmes-e. Ehhez először azt kell ellenőrizni, hogy

$$729z^2 - 540z + 108 > 0$$

valóban fennáll. A diszkrimináns ez:

$$(-540)^2 - 4 \cdot 729 \cdot 108 = -23\,328$$

Ennek negatív volta miatt minden z-re valóban fennáll, hogy

$$729z^2 - 540z + 108 > 0$$

Másrészt ellenőriznunk kell, hogy tényleg fennáll-e ez:

$$27z + \sqrt{729z^2 - 540z + 108} - 10 \neq 0$$

Egyenlőség esetén ezeket kapnánk:

$$\begin{aligned}\sqrt{729z^2-540z+108} &= 10-27z\\ 729z^2-540z+108-(10-27z)^2 &= 0\end{aligned}$$

Ez pedig lehetelen, mert a bal oldal értéke egyszerűen csak 8.

Ott tartunk, hogy a w-re kapott kifejezés értelmes. Most annak ellenőrzése következik, hogy a szóbanforgó képlet tényleg megoldása a

$$2z = 1 + \frac{w-1}{3} + \left(\frac{w-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{w-1}{3}\right)^3$$

egyenletnek. Ezt az egyenletet 27-tel felszorozva ezt kapjuk:

$$\begin{aligned}54z &= 27+9(w-1)+3(w-1)^2+(w-1)^3\\ &= w^3+6w+20\end{aligned}$$

Azt már tudjuk a fentiekből, hogy a megoldás egyértelmű; tehát csak annyit kell meggondolni, hogy a w-re felírt fenti kifejezés kielégíti a

$$w^3+6w = 2(27z-10)$$

egyenletet. Számításaink során használni fogjuk az ismert

$$(a-b)^3 = a^3-b^3-3(a-b)ab$$

azonosságot az

$$\begin{aligned}u &= 27z-10+\sqrt{729z^2-540z+108}\\ a &= \sqrt[3]{u}\\ b &= 2/a\end{aligned}$$

szereposztással. Ezt kell tehát ellenőriznünk:

$$(a-b)^3+6(a-b) = 2(27z-10)$$

A bal oldalt kifejtjük:

$$\begin{aligned}& a^3-b^3-3(a-b)ab+6(a-b)\\ =\ & a^3-b^3-3(a-b)\cdot 2+6(a-b)\\ =\ & a^3-b^3\\ =\ & u-8/u\end{aligned}$$

Azt kell tehát belátnunk, hogy

$$u-8/u = 2(27z-10)$$

Ha u-val szorozzuk ezt az egyenletet, ekvivalens változatot kapunk, hiszen azt már fent megmutattuk, hogy $u \neq 0$. Igazolandó tehát, hogy

$$u^2 - 8 = 2(27z - 10)u$$

A bal oldal kifejtése:

$$\begin{aligned}
& \left(27z - 10 + \sqrt{729z^2 - 540z + 108}\right)^2 - 8 \\
= \quad & 2(27z-10)\sqrt{729z^2 - 540z + 108} + 1458z^2 \;\; - 1080z \;\; + 200 \\
= \quad & 2(27z-10)\sqrt{729z^2 - 540z + 108} + 2\,(27z-10)^2 \\
= \quad & 2(27z-10)\left(\sqrt{729z^2 - 540z + 108} + 27z - 10)\right) \\
= \quad & 2(27z-10)u
\end{aligned}$$

Haza érkeztünk! Igazolva lévén a $w = \sqrt[3]{u} - 2/\sqrt[3]{u}$ képlet, azt nyertük, hogy $w = 3x + 1$ miatt

$$3x + 1 = \sqrt[3]{u} - \frac{2}{\sqrt[3]{u}}$$

révén

$$x = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{u} - \frac{2}{\sqrt[3]{u}} - 1\right)$$

ahol

$$\begin{aligned}
z &= \frac{y}{2} \\
u &= 27z - 10 + \sqrt{729z^2 - 540z + 108}
\end{aligned}$$

Ne feledjük, hogy $x = q^{-1}$ és $y = r^{-1}$! Tehát

$$q = \frac{3}{\sqrt[3]{u} - \frac{2}{\sqrt[3]{u}} - 1}$$

ahol

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{2r} \\
u &= 27z - 10 + \sqrt{729z^2 - 540z + 108}
\end{aligned}$$

Most visszatérünk az eredeti szöveges feladathoz. Mikor mondhatjuk, hogy a negyedik lehetőség valószínűsége 90 százalék? Ha $r = 0.9$, akkor

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{2\cdot 0.9} = \frac{5}{9} \\
u &= 27z - 10 + \sqrt{729z^2 - 540z + 108} \\
&= 27\cdot\frac{5}{9} - 10 + \sqrt{729\cdot\frac{25}{81} - 540\cdot\frac{5}{9} + 108} \\
&= 5 + \sqrt{33} \\
q &= \frac{3}{\sqrt[3]{5+\sqrt{33}} - \frac{2}{\sqrt[3]{5+\sqrt{33}}} - 1} \approx 9.99 \\
p &= \frac{r}{q^3} \approx \frac{0.9}{9.99^3} \approx 0.0009
\end{aligned}$$

Tehát ha az első lehetőség valószínűsége egy ezrednél kisebb, akkor a negyedik lehetőség valószínűsége körülbelül 90 százalék legalább.

A slusszpoén az, hogy a kolléga visszajelzett: a harmadik lehetőség volt az igazi, hiszen a gépén a vírusölő vírust ölt pár perccel az e-levelem beérkezése után. Pedig mi a harmadik lehetőség esélyét csak 9 százalékosnak gondoltuk! Ugyanis $r = 0.9$ esetén

$$pq^2 = \frac{r}{q} \approx \frac{0.9}{9.99} \approx 0.09$$

Tanulság: Hamarabb megölhetni egy vírust, mint kiszámíthatni létének esélyét!